

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

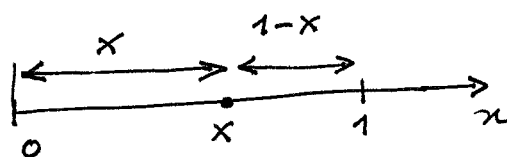
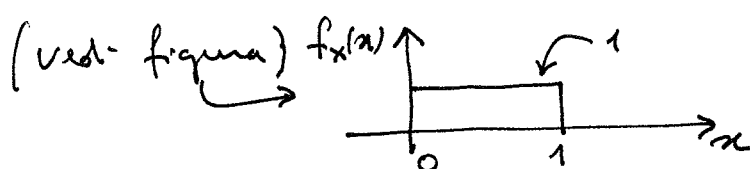
Quesito A33

Si sceglie a caso un punto di ascissa X nell'intervallo $(0,1)$. Le lunghezze dei due segmenti in cui risulta suddiviso l'intervallo siano rispettivamente la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di un numero complesso Z .

Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Y = \{\text{modulo quadro di } Z\} = |Z|^2$ e se ne tracci un grafico.

Quesito A33 (soluzione)

Detta X la v.a. "ascissa del punto scelto a caso in $(0,1)$ " si può assumere $f_X(x)$ uniforme fra 0 e 1, quindi:



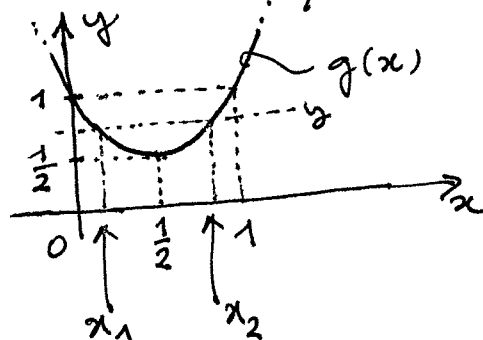
Si ha:

$$Z = X + j(1-X) \Rightarrow Y = |Z|^2 = X^2 + (1-X)^2 = 2X^2 - 2X + 1$$

Si cerca quindi la densità di prob. della v.a. $Y = g(X)$ dove:

$$y = g(x) = 2x^2 - 2x + 1 \rightarrow$$

Si applica il Teorema fondamentale.



L'equazione:

$$y = 2x^2 - 2x + 1 \quad \text{ovvero: } 2x^2 - 2x + 1 - y = 0$$

non ha radici per $y < \frac{1}{2}$ (come si vede dal grafico o da:

$\Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot (1-y) \geq 0$) quindi in tale intervallo $f_Y(y) = 0$.

Per $y \geq \frac{1}{2}$ si hanno due radici:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (1-y)}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{2y-1})$$

Si ha inoltre:

$$g'(x) = 4x - 2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |g'(x_1)| &= \left| 4 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{2y-1} \right) - 2 \right| = 2 \cdot \sqrt{2y-1} \\ \rightarrow |g'(x_2)| &= \left| 4 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2y-1} \right) - 2 \right| = 2 \cdot \sqrt{2y-1} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_x(x_2)}{|g'(x_2)|} & \text{per } y \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{per } y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

ma $f_x(x_{1,2}) = 1$ per $0 < x_{1,2} < 1$ ossia per $\frac{1}{2} < y < 1$

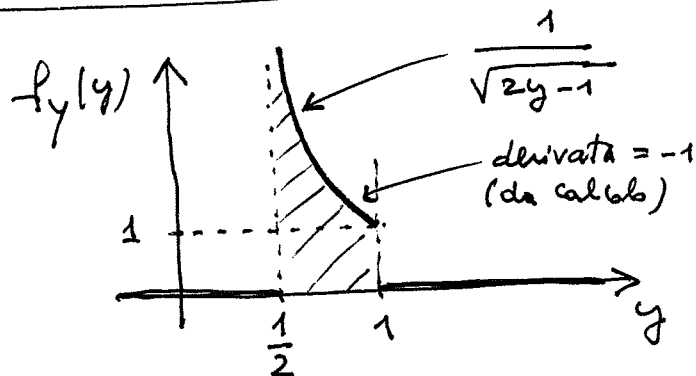
e $f_x(x_{1,2}) = 0$ per $x_{1,2} < 0$ e $x_{1,2} > 1$ " " $y > 1$

quindi:

(Immediatamente dal grafico di $g(x)$)

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2y-1}} + \frac{1}{2\sqrt{2y-1}} = \frac{1}{\sqrt{2y-1}} & \text{per } \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Grafico di $f_y(y)$:



{ Verifica di normalizzazione:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{2y-1}} dy = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda d\lambda = 1$$

Cambio di variabile:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2y-1} &= \lambda \rightarrow y = \frac{1}{2}(\lambda^2 + 1) \\ dy &= \frac{1}{2} 2\lambda \cdot d\lambda = \lambda d\lambda \end{aligned} \right\}$$