

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A34

Un satellite artificiale deve svolgere una missione di osservazione della Terra di durata $T = 6$ mesi. Se l'apparecchiatura di osservazione ha una vita rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$, quale deve essere il valore di λ (espresso con l'appropriata unità di misura) necessario affinché la probabilità che l'apparecchiatura funzioni almeno per tutta la durata della missione sia $P = 0,9$? Qual è il corrispondente valor medio della vita dell'apparecchiatura, $E\{X\}$? La missione viene effettuata con un'apparecchiatura avente proprio il valore di λ trovato sopra, ma purtroppo al termine della missione l'apparecchiatura risulta non funzionante: qual è la probabilità che abbia funzionato per almeno $T_1 = 5$ mesi?

Quesito A34 (soluzione)

L'evento: {l'apparecchiatura funziona per almeno tutta la durata della missione} equivale all'evento $\{X > T\}$ con $T = 6$ mesi -

Si vuole quindi che sia: $P\{X > 6\} = 0,9$ ossia:

$$P\{X > 6\} = \int_6^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_6^{+\infty} = e^{-6\lambda} = 0,9$$

da cui:

$$-6\lambda = \ln 0,9 \rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{6} \ln 0,9 = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ mesi}^{-1}}$$

È noto che il v.m. di una v.a. esponenziale negativa è $E\{X\} = \frac{1}{\lambda}$
quindi nel nostro caso: $E\{X\} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1,75 \cdot 10^{-2}} = 57,14 \text{ mesi} \approx 4 \text{ anni e 9 mesi}$

Se per $T = 6$ mesi l'apparecchiatura non funziona significa che si è verificato l'evento $\{X < 6\}$ - Il funzionamento per almeno $T_1 = 5$ mesi equivale all'evento $\{X > 5\}$ - Si chiede quindi di calcolare la probabilità condizionata:

$$\boxed{P\{X > 5 | X < 6\}} = \frac{P\{5 < X < 6\}}{P\{X < 6\}} = \frac{\int_5^6 \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_0^6 \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{\lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_5^6}{\lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^6} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda 6} - e^{-\lambda 5}}{e^{-\lambda 6} - 1} = \frac{0,9 - e^{-1,75 \cdot 10^{-2} \cdot 5}}{0,9 - 1} \approx \boxed{0,16}$$

Con il valore di $\lambda = 1,75 \cdot 10^{-2}$ che
ancora $e^{-\lambda 6} = 0,9$