

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A37

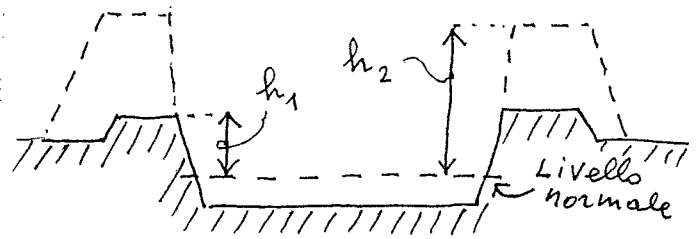
Il livello massimo che un certo fiume raggiunge in un anno (misurato in metri oltre il livello normale del fiume) è una v.a. X con densità di probabilità:

$$f_X(x) = a(x-10)^4 \prod\left(\frac{x-5}{10}\right)$$

Esiste un argine alto $h_1=2$ m (rispetto al livello normale del fiume) quindi se X supera tale livello si verifica un'alluvione.

- Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ di X e si trovi il valore della costante a .
- Si calcoli la probabilità che si abbiano una o più alluvioni in 6 anni.
- Poiché il rischio di alluvioni è ritenuto troppo elevato si vuole innalzare l'argine in modo che la probabilità di non avere alluvioni in 50 anni sia 0,9. Quale deve essere la nuova altezza h_2 dell'argine?

{Si assuma che si verifichi una sola piena all'anno e che il livello massimo raggiunto sia indipendente da un anno all'altro}.

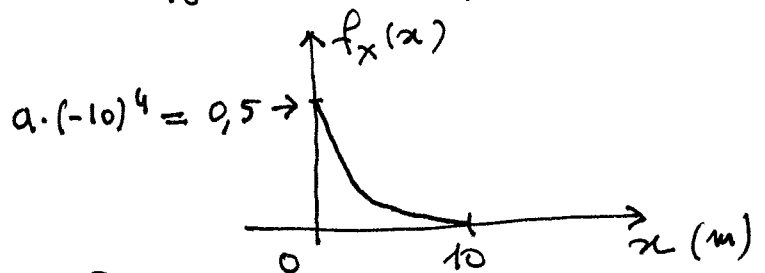


Quesito A37 (Soluzione)

Il valore di a si trova dalla condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \rightarrow \int_0^{10} a \cdot (x-10)^4 dx = a \cdot \frac{(x-10)^5}{5} \Big|_0^{10} = \frac{a}{5} \cdot [0 - (-10)^5] = \frac{a}{5} \cdot 10^5 = 1$$

Da cui: $\boxed{a = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}}$



La funzione di distribuzione è:

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

Con la $f_X(x)$ data e $F_X(x) = 0$ per $x < 0$ e $F_X(x) = 1$ per $x \geq 10$

e inoltre per $0 \leq x < 10$ si ha:

$$\boxed{F_X(x) = \int_0^x a \cdot (u-10)^4 du = a \cdot \frac{(u-10)^5}{5} \Big|_0^x = \frac{a}{5} [(x-10)^5 + 10^5] = 10^{-5} (x-10)^5 + 1}$$

La probabilità di avere una o più alluvioni in 6 anni si può scrivere così:

$$\begin{aligned} P\{\text{una o più alluvioni in 6 anni (con } h_1)\} &= 1 - P\{0 \text{ alluvioni in 6 anni}\} = \\ &= 1 - \left(\underbrace{P\{X \leq h_1\}}_{\substack{\text{no alluvione in} \\ \text{un anno}}} \right)^6 = 1 - [F_X(h_1)]^6 = 1 - [10^{-5}(2-10)^5 + 1]^6 \approx \boxed{0,91} \end{aligned}$$

L'altezza del nuovo argine h_2 si trova scrivendo la probabilità di non avere alluvioni in 50 anni, ponendola uguale a 0,9 come richiesto e ricavando h_2 , ossia:

$$\begin{aligned} P\{0 \text{ alluvioni in 50 anni (con } h_2)\} &= (P\{X \leq h_2\})^{50} = \\ &= [F_X(h_2)]^{50} = 0,9 \end{aligned}$$

ossia

$$[10^{-5}(h_2 - 10)^5 + 1]^{50} = 0,9$$

da cui:

$$\boxed{h_2 = [(0,9^{\frac{1}{50}} - 1) \cdot 10^5]^{\frac{1}{5}} + 10 = 7,08 \text{ m}}$$