

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A38

La densità di probabilità congiunta di due v.a. X e Y è la seguente:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Dove k è una costante.

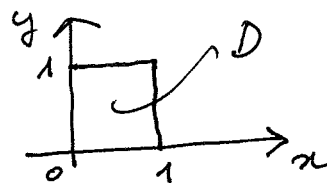
- Si trovi il valore di k .
- Si determini se le v.a. X e Y sono indipendenti

Quesito A38 (soluzione)

La densità di probabilità congiunta è diversa da zero solo nel quadrato D in figura, ma non è costante -

Il valore di k si trova dalla condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 kxy dx dy =$$



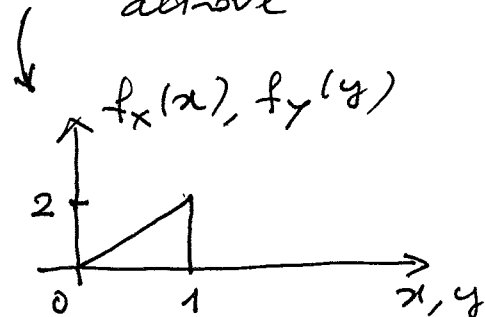
$$= k \int_0^1 y \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) dy = k \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{k}{4} = 1 \rightarrow \boxed{k=4}$$

Per trovare se X e Y sono indipendenti occorre trovare le densità di probabilità marginali:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 4xy dy = 2x & \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e simmetricamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{per } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Poiché risulta:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$\nwarrow 4xy \quad \nwarrow 2x \quad \nwarrow 2y$ in D , 0 altrove

le v.a. sono indipendenti

(segue)

{ Per maggiore comprensione si riporta qui sotto
il grafico di $f_{XY}(x,y)$ }

