

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A3

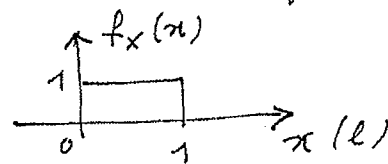
18/2/2011

Sono disponibili sei contenitori cilindrici con superficie di base di 1 dm^2 . Due di questi sono alti 6 cm e quattro sono alti 15 cm. Si sceglie a caso un contenitore e vi si versa una quantità di liquido che è una variabile aleatoria X uniformemente distribuita fra 0 e 1 litro.

Si trovi la densità di probabilità della variabile aleatoria $Y = \{\text{livello raggiunto dal liquido nel contenitore}\}$.

Quesito A3 - (Soluzione)

La densità di probabilità della v.a. $X = \{\text{quantità di liquido versato (in litri)}\}$ è come in figura:



Per trovare la densità di probabilità della v.a. $Y = \{\text{livello raggiunto dal liquido nel contenitore}\}$

conviene usare il teorema delle probabilità totali (Eq.(8.3) p.247):

$$f_Y(y) = f_Y(y|A_1)P(A_1) + f_Y(y|A_2)P(A_2) \quad (1)$$

Bononi
Ferrari

dove: $A_1 = \{\text{Il contenitore scelto è alto } 15 \text{ cm}\} \rightarrow P(A_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$A_2 = \{\text{" " " " " } 6 \text{ cm}\} \rightarrow P(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

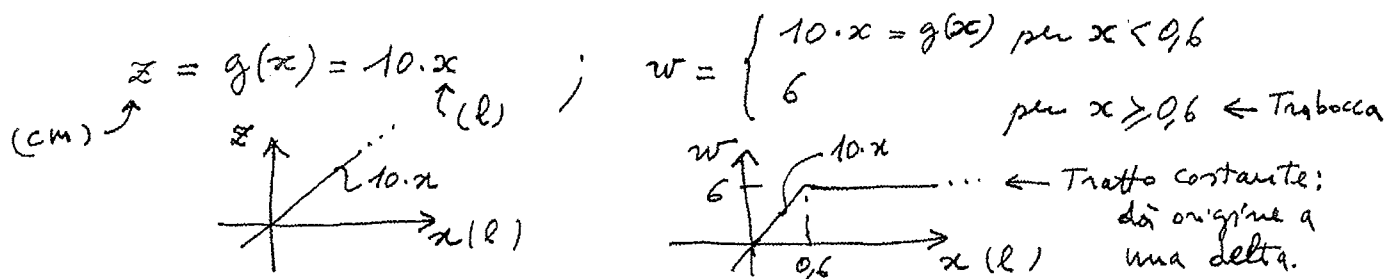
Detta Z e W le v.a.:

$Z = \{\text{altezza (cm) raggiunta dal liquido in un cont. alto } 15 \text{ cm}\}$

$W = \{\text{" " " " " } 6 \text{ cm}\}$

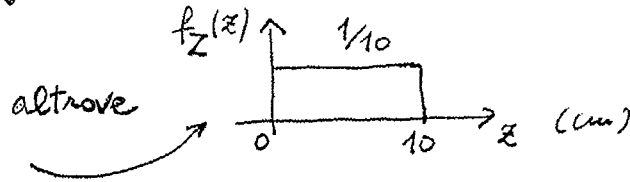
si ha: $f_Y(y|A_1) = f_Z(y)$ e $f_Y(y|A_2) = f_W(y)$ (2)

Si noti che Z e W sono funzioni di X secondo le seguenti:



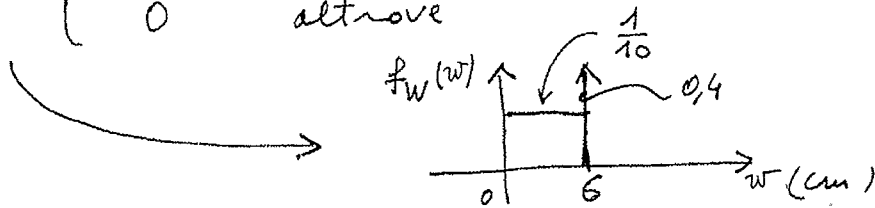
Applicando il teorema fondamentale si ha quindi:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{1}{10} & \text{per } 0 < z < 10, \text{ essendo: } x_1 = \frac{z}{10} \text{ e } g'(x) = 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



e l'altra:

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{1}{10} & \text{per } 0 < w < 6, \text{ essendo: } x_1 = \frac{w}{10} \text{ e } g'(x) = 10 \\ \delta(w-6) \cdot P\{X \geq 0,6\} = 0,4 \cdot \delta(w-6) & \text{per } w = 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



E in fine dalla (1) e la (2), sostituendo y a z e w in $f_Z(z)$ e $f_W(w)$, si ha:

$$f_Y(y) = f_Z(y) \cdot \frac{2}{3} + f_W(y) \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} + \left[\frac{1}{10} + 0,4 \cdot \delta(y-6) \right] \frac{1}{3} = \\ = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} \delta(y-6) & \text{per } 0 < y \leq 6 \text{ cm} \\ \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{30} & \text{per } 6 < y < 10 \text{ cm} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

