

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A40

15/6/2012

Due giocatori lanciano una coppia di dadi a turno. Vince chi per primo ottiene la somma 7. Qual è la probabilità di vincere per ciascun giocatore?

Quesito A40 (Soluzione)

Si considerino i lanci come una serie di prove ripetute eseguite a turno dai due giocatori -
Indichiamo con $i = 1, 2, \dots$ l' i -esimo lancio della serie (chiunque sia il giocatore) - Si ha la seguente uguaglianza (di eventi):

$$\begin{aligned} \{I\} &\triangleq \{ \text{Vince il giocatore che lancia per primo} \} = \\ &= \{ \text{Esce somma 7 al 1° lancio} \} \cup \\ &\cup \{ \text{Esce somma 7 al 3° lancio, esce somma} \neq 7 \text{ nei due precedenti} \} \cup \\ &\vdots \cup \{ \text{Esce somma 7 al lancio } \underline{i \text{ dispari}}, \text{ esce somma} \neq 7 \text{ nei } (i-1) \text{ precedenti} \} \cup \\ &\vdots \dots \end{aligned}$$

Si tratta dell'unione di infiniti eventi mutuamente esclusivi ciascuno dei quali (tranne il primo) è l'intersezione di eventi indipendenti (le uscite nelle singole prove ripetute) -

Detta $p = 1 - q$ la probabilità di ottenere somma 7 nel generico lancio si può quindi scrivere:

$$P(I) = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{+\infty} p \cdot q^{(i-1)}$$

che col cambio di indice: $i = 2k+1$ con $k=0,1,2,\dots$

si può scrivere:

$$\boxed{P(I) = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{+\infty} p \cdot q^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} p \cdot q^{2k} = p \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = p \cdot \frac{1}{1-q^2}}.$$

L'ultimo passaggio ^{è stato} eseguito ricordando la somma di una serie geometrica di ragione $q^2 (< 1)$ -

Essendo:

$$\begin{aligned} p &\triangleq P\{\text{Esce somma 7 nel generico lancio}\} = \{16, 25, \dots, 61\} \\ &= \frac{(\text{n. coppie che danno somma 7})}{(\text{n. coppie totali})} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} (= 1-q) \end{aligned}$$

si ha:

$$\boxed{P(I) = p \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-(\frac{5}{6})^2} = \frac{6}{11} = 0,54}.$$

La probabilità che vinca il giocatore che lancia per secondo (II) è naturalmente il complemento a 1:

$$\boxed{P(II) = 1 - P(I) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} = 0,45}.$$

Quest'ultima poteva comunque essere calcolata in modo simile alla prima, con i che assume solo valori pari:

$$\boxed{P(II) = \sum_{i=2,4,6,\dots}^{+\infty} p \cdot q^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} p \cdot q^{(2k+1)} = pq \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = pq \cdot \frac{1}{1-q^2}}.$$

Dove si è usato il cambio di indice $i = 2k+2$, $k=0,1,2,\dots$
 È facile verificare che l'espressione trovata per $P(II)$ è uguale a: $1 - P(I)$