

Esame di

TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A42 15/6/12

Sia X un v.a. discreta che può assumere i valori $x_1 = 5$ e $x_2 = 13$ con le probabilità $p_1 = 2/5$ e $p_2 = 3/5$ rispettivamente.

Sia N una v.a. continua, indipendente da X , con densità di probabilità uniforme fra $-\Delta/2$ e $\Delta/2$, con $\Delta = 10$.

Sia Y la v.a. $Y = X + N$.

Si trovi la densità di probabilità di $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico.

Se in una realizzazione dell'esperimento si osserva che Y ha assunto un valore uguale al suo valore medio qual è la probabilità che X abbia assunto il valore x_1 in tal caso?

Quesito A42 (Soluzione)

1° metodo

Essendo X una v.a. discreta si può ricorrere all'apposita versione del teorema delle probabilità totali (vedi Bonomi, Ferrari par. 11.2 p. 361 e in particolare l'eq. (11.12) e l'Esempio 11.1):

$$f_Y(y) = f_Y(y|X=x_1) \cdot P\{X=x_1\} + f_Y(y|X=x_2) \cdot P\{X=x_2\}$$

Definendo le v.a.

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &\triangleq x_1 + N = 5 + N \\ Y_2 &\triangleq x_2 + N = 13 + N \end{aligned} \right\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Trasformazioni della v.a. } N \text{ del tipo:} \\ g(N) = aN + b, \text{ con } a=1 \end{array}$$

si ha (vedi B., F. Esempio 6.5 p. 154):

$$f_Y(y|X=x_1) = f_{Y_1}(y) = f_N(y-x_1) = f_N(y-5)$$

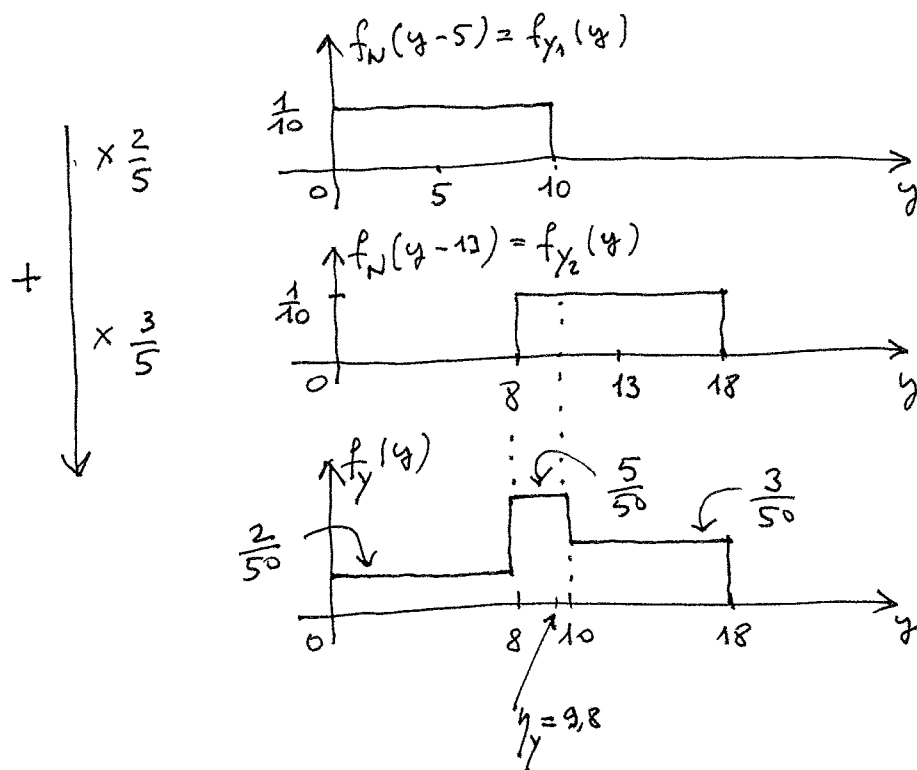
$$f_Y(y|X=x_2) = f_{Y_2}(y) = f_N(y-x_2) = f_N(y-13)$$

Ed infine, essendo $\mathbb{P}\{X=x_1\}=p_1$ e $\mathbb{P}\{X=x_2\}=p_2$:

$$\boxed{f_Y(y) = p_1 \cdot f_N(y-x_1) + p_2 f_N(y-x_2) = \frac{2}{5} f_N(y-5) + \frac{3}{5} f_N(y-13) =}$$

$$= \frac{2}{50} \mathbb{I}\left(\frac{y-5}{10}\right) + \frac{3}{50} \mathbb{I}\left(\frac{y-13}{10}\right)$$

Si vedano anche le figure:



Il valor medio di Y è:

$$\boxed{y_Y = E\{Y\} = E\{X + N\} = E\{X\} + E\{N\} = \underbrace{x_1 p_1 + x_2 p_2}_{E\{X\}} + \underbrace{0}_{E\{N\}=0 \text{ per la simmetria pari di } f_N(x)} =}$$

$$= 5 \cdot \frac{2}{5} + 13 \cdot \frac{3}{5} = \frac{49}{5} = 9.8$$

Si cerca: $\mathbb{P}\{X=x_1 | Y=y_Y\}$.

Applicando l'appropriata versione della formula di Bayes (B.F. eq. (11.9) p. 364) e ricavando i valori numerici necessari osservando la posizione del valor medio $y_Y = 9.8$ nelle figure precedenti si ha:

$$\boxed{P\{X=x_1 | Y=y\} = \frac{f_Y(y|X=x_1) \cdot P\{X=x_1\}}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y_1}(y) \cdot P\{X=x_1\}}{f_Y(y)} =}$$

$$= \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{5}{50}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

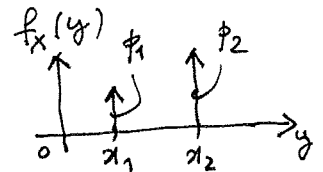
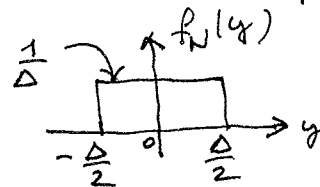
2° metodo

Essendo X e N v.a. indipendenti la densità di probabilità della v.a. Y , somma delle due, è uguale alla convoluzione delle rispettive densità, ossia:

$$f_Y(y) = f_X(y) * f_N(y)$$

Le due densità si ricavano dal testo osservando che essendo la X discreta la sua densità è la somma di opportune delta di Dirac:

$$f_N(y) = \frac{1}{\Delta} \Pi\left(\frac{y}{\Delta}\right) = \frac{1}{10} \Pi\left(\frac{y}{10}\right)$$



$$f_X(y) = p_1 \delta(y-x_1) + p_2 \delta(y-x_2) = \frac{2}{5} \delta(y-5) + \frac{3}{5} \delta(y-13)$$

Ricordando quindi le proprietà della convoluzione e della delta si ha infine:

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(y) * f_N(y) = \left[\frac{2}{5} \delta(y-5) + \frac{3}{5} \delta(y-13) \right] * f_N(y) =}$$

$$= \frac{2}{5} f_N(y-5) + \frac{3}{5} f_N(y-13) = \frac{2}{50} \Pi\left(\frac{y-5}{10}\right) + \frac{3}{50} \Pi\left(\frac{y-13}{10}\right)$$

come già ottenuto col primo metodo -