

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A47

Le coordinate di un punto P sul piano cartesiano sono due v.a. indipendenti X e Y uniformemente distribuite fra 0 e 1.

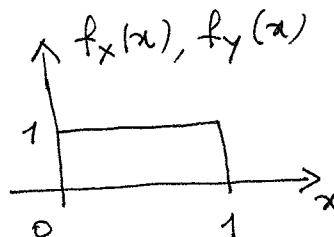
Si trovi la densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ delle due v.a. e si calcoli la probabilità che la distanza D del punto P dall'origine sia maggiore di 1.

Quesito A47 (Soluzione)

Dal testo si ricava:

$$f_X(x) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$f_Y(y) = \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

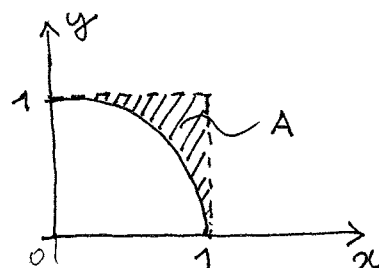


Quindi, per l'indipendenza:

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= f_X(x) \cdot f_Y(y) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$

Detta P_1 la probabilità che la distanza D del punto P dall'origine sia maggiore di 1 si ha:

$$P_1 = \iint_A f_{XY}(x, y) \, dx, dy$$



dove A è la regione del piano tratteggiata in figura. Data la costanza di $f_{XY}(x, y) = 1$ sul quadrato la probabilità cercata è uguale al rapporto fra l'area della regione A e quella dell'intero quadrato quindi (detto r il raggio della circonferenza):

$$P_1 = \frac{r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2}{r^2} = 1 - \frac{\pi}{4} = 0,215$$

(Si noti l'indipendenza di P_1 dal raggio r .)