

Esame di TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A50

11/9/12

Un satellite per telecomunicazioni ha due trasmettitori i cui tempi di vita sono variabili aleatorie indipendenti con identica densità di probabilità:

$$f_{X1}(x) = f_{X2}(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x) \quad \text{con } \lambda > 0.$$

La trasmissione è continua e per essa si utilizza un solo trasmettitore alla volta: il secondo entra in funzione istantaneamente solo quando il primo si guasta.

Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Z = \{\text{tempo di trasmissione del satellite}\}$.

Quesito A50 (soluzione)

Dalla descrizione si ricava immediatamente (vedi anche le figure):

$$Z = X_1 + X_2$$

per cui, essendo X_1 e X_2 indipendenti:

$$f_Z(z) = f_{X_1}(z) * f_{X_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(w) \cdot f_{X_2}(z-w) dw$$

Con l'aiuto delle figure si ricava che, per $z > 0$, si può scrivere:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(z) * f_{X_2}(z) &= \\ &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda w} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-w)} dw = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z e^{-\lambda w} \cdot e^{\lambda w} dw = \\ &= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda z} \cdot z \end{aligned}$$

Perché la convoluzione è nulla per $z < 0$ si può scrivere:

$$\left[f_Z(z) = \lambda^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda z} u(z) \right] \rightarrow$$

