

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A54

23/11/12

Un certo giorno voi entrate nella vostra banca all'istante t_2 e trovate che allo sportello c'è già un cliente entrato ad un istante incognito $t_1 < t_2$. Sapendo che la v.a. $X = \{\text{Tempo di permanenza allo sportello di un generico cliente}\}$ è di tipo esponenziale negativo con valor medio $\eta_X = 5$ minuti, qual è la probabilità che dobbiate attendere più di 5 minuti prima che sia il vostro turno? {Si troverà che tale probabilità non dipende dai valori di t_1 e t_2 }.

Quesito A54 (soluzione)

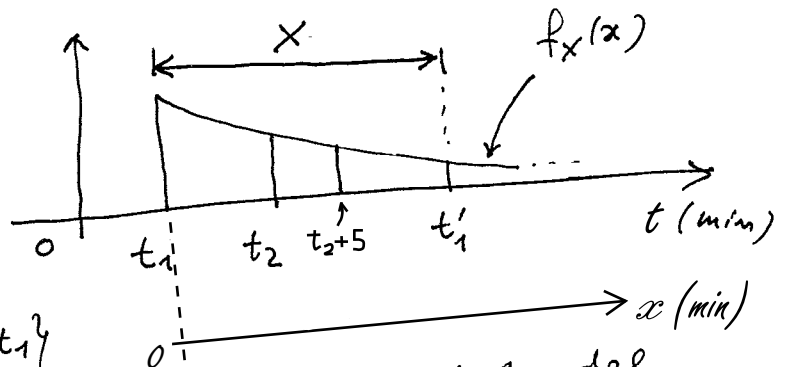
Il tempo di permanenza allo sportello del primo cliente (v.a. X) è uguale alla differenza fra l'istante di termine della sua permanenza (ria p.es. t'_1) e l'istante di inizio t_1 (vedi figura).

Si cerca quindi la probabilità dell'evento

$$\{t'_1 > t_2 + 5\} \equiv \{X > t_2 - t_1 + 5\}$$

condizionata

$$\text{dall'evento: } \{t'_1 > t_2\} \equiv \{X > t_2 - t_1\}$$



che esprime il fatto che a t_2 ~~non è~~ la permanenza del primo cliente non è ancora terminata. (Si osservi che t'_1 è una variabile aleatoria). Quindi in termini di tempo di permanenza si cerca la probabilità:

$$\boxed{\mathbb{P}\{X > t_2 - t_1 + 5 \mid X > t_2 - t_1\} = \frac{\mathbb{P}\{(X > t_2 - t_1 + 5) \cap (X > t_2 - t_1)\}}{\mathbb{P}\{X > t_2 - t_1\}} =}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X > t_2 - t_1 + 5\}}{\mathbb{P}\{X > t_2 - t_1\}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\int_{t_2-t_1+5}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_{t_2-t_1}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{\cancel{\lambda} \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{(-\lambda)} \Big|_{t_2-t_1+5}^{+\infty}}{\cancel{\lambda} \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{(-\lambda)} \Big|_{t_2-t_1}^{+\infty}} = \\
 &= \frac{0 - e^{-\lambda(t_2-t_1+5)}}{0 - e^{-\lambda(t_2-t_1)}} = e^{-\lambda 5} = e^{-1} \simeq 0,37
 \end{aligned}$$

Dove, nell'ultimo passaggio si è applicato il noto risultato relativo alla densità di prob. esponenziale negativa:

$$E\{X\} = \frac{1}{\lambda} = 5 \text{ min} \quad \text{da cui: } \lambda = \frac{1}{5} \text{ min}^{-1}$$

Il fatto che il risultato non dipenda da t_1 e t_2 è dovuto ad una proprietà della densità esponenziale negativa e non si sarebbe verificato con altre -