

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Esercizio n. 2 (A56)

Sia X una v.a. uniformemente distribuita fra a e b , con $0 < a < b$.

- a) Si trovi la densità di probabilità della variabile $Y = c \cdot \sqrt[3]{X}$, con $c > 0$, e se ne tracci un grafico.
b) Si trovi il valor medio della variabile Y .

Quanto A56 (Soluzione)

a) È $Y = g(X)$ dove $g(x) = c \cdot \sqrt[3]{x}$.

Il grafico di $g(x)$ e la densità $f_X(x)$ sono in figura.

Si può applicare il teorema fondamentale osservando che

l'equazione $y = c \sqrt[3]{x}$ ha come unica soluzione, per ogni y :

$$x_1 = \left(\frac{y}{c}\right)^3$$

e che $g'(x) = c \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{c}{3 \sqrt[3]{x^2}}$

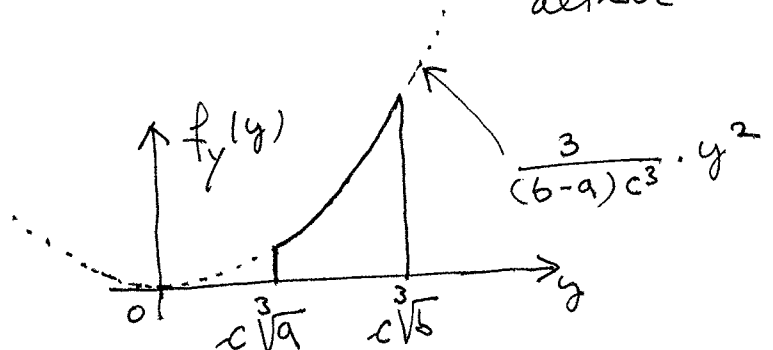
da cui:

$$g'(x_1) = c \cdot \frac{1}{3} \left(x_1^{-\frac{2}{3}}\right) = c \cdot \frac{1}{3} \left[\left(\frac{y}{c}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} = c \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{y}{c}\right)^{-2} = \frac{1}{3} \frac{c^3}{y^2}$$

Quindi:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{(b-a)}}{\left|\frac{1}{3} \cdot \frac{c^3}{y^2}\right|} = \frac{1}{(b-a)} \cdot \frac{1}{c^3} \cdot 3y^2 & \text{per } c\sqrt[3]{a} < y < c\sqrt[3]{b} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Grafico →



b) Il valor medio $E\{Y\}$ si può calcolare col teorema dell'aspettazione:

$$\boxed{E\{Y\} = E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x) dx =}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -c \sqrt[3]{x} \cdot f_x(x) = \int_a^b -c \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{-c}{(b-a)} \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_a^b =$$

$$= \frac{-c}{(b-a)} \cdot \frac{3}{4} (b^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}})$$

Ma anche, usando la $f_y(y)$ trovata:

$$\boxed{E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_y(y) dy = \int_{c\sqrt[3]{a}}^{c\sqrt[3]{b}} y \cdot \frac{1}{(b-a)} \frac{1}{c^3} \cdot 3y^2 dy =}$$

$$= \frac{3}{(b-a) \cdot c^3} \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_{c\sqrt[3]{a}}^{c\sqrt[3]{b}} = \frac{3}{(b-a) \cdot c^3} \frac{1}{4} \cdot c^4 (b^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}}) =$$

$$= \frac{3}{4} \frac{-c}{(b-a)} (b^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}})$$

Verifica di normalizzazione di $f_y(y)$ (Non richiesta).

$$\int_{c\sqrt[3]{a}}^{c\sqrt[3]{b}} \frac{1}{(b-a)} \frac{1}{c^3} \cdot 3y^2 dy = \frac{3}{(b-a) \cdot c^3} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{c\sqrt[3]{a}}^{c\sqrt[3]{b}} =$$

$$= \frac{3}{(b-a) \cdot c^3} \cdot \frac{1}{3} (c^3 b - c^3 a) = 1$$