

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Esercizio n. 3 (A57)

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante c nel dominio indicato in figura (circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine) ed è nulla altrove.

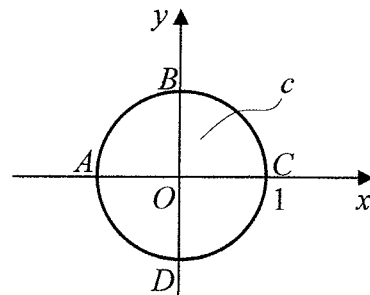
a) Si trovi il valore della costante c .

Sia $F_{XY}(x, y)$ la funzione di distribuzione congiunta delle due variabili.

b) Si individui sul piano cartesiano, mediante tratteggio, la regione per cui è $F_{XY}(x, y) = 0$. Sullo stesso piano si individui, mediante un diverso tratteggio, la regione per cui è $F_{XY}(x, y) = 1$. Si dica inoltre quanto vale la funzione $F_{XY}(x, y)$ nei punti:

$O(0,0)$, $A(-1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, $D(0,-1)$.

c) Si trovino le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico. Si dica infine se X e Y sono indipendenti.



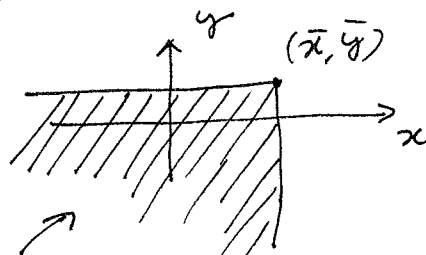
Quanto A57 (Soluzione)

- a) La densità congiunta $f_{xy}(x,y)$ ha la forma di un cilindro di altezza c e base il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine - Per la normalizzazione il volume di tale cilindro deve essere unitario quindi:

$$\pi \cdot 1^2 \cdot c = 1 \longrightarrow \boxed{-c = \frac{1}{\pi}}$$

- b) La funzione $F_{xy}(x,y)$ assume in ogni punto ~~del~~ ^{$(\bar{x}, \bar{y})$} del piano il valore pari alla massa di probabilità che si trova nel dominio $(x \leq \bar{x}, y \leq \bar{y})$, e infatti:

$$F_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = P\{X \leq \bar{x}, Y \leq \bar{y}\}$$



La regione del piano in cui è

$F_{xy}(x,y) = 0$ è quella in cui l'angolo tratteggiato non ha intersezione con la circonferenza data e la regione in cui è $F_{xy}(x,y) = 1$ è quella ~~per~~ per cui la circonferenza è tutta contenuta nell'angolo -

Quindi (vedi figura) $\rightarrow$

La massa di probabilità che ritrova nell'angolo quando il vertice è nei punti A, B, C, D, O

è uguale alla frazione di

area del cerchio contenuta nell'angolo (perché $f_{xy}(x,y) = c$ è costante su tutto il cerchio) - Quindi facilmente:

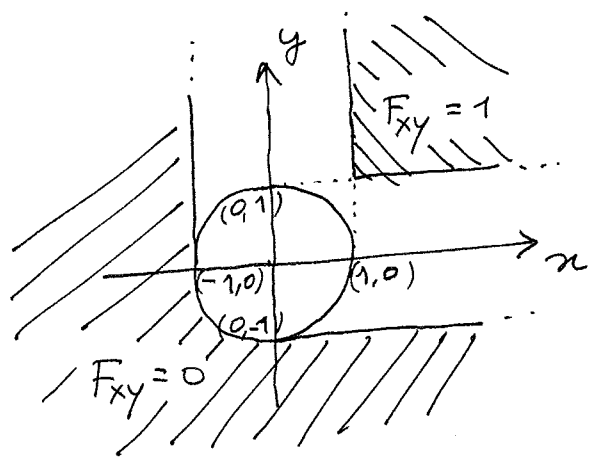
$$A: F_{xy}(-1,0) = 0$$

$$C: F_{xy}(1,0) = \frac{1}{2}$$

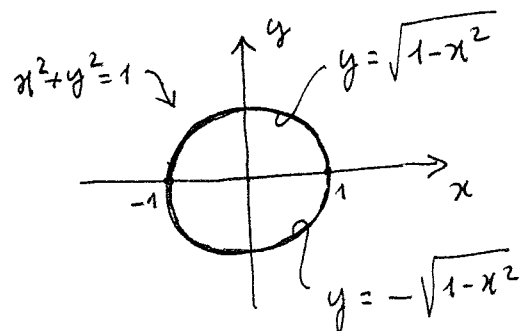
$$O: F_{xy}(0,0) = \frac{1}{4}$$

$$B: F_{xy}(0,1) = \frac{1}{2}$$

$$D: F_{xy}(0,-1) = 0$$

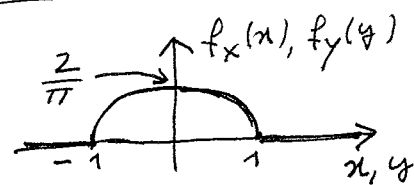


c) Le densità marginali sono:



$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dy =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{1}{\pi} [y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & \text{per } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrove } (|x| > 1) \end{cases}$$



$$f_y(y) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} [x]_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} & \text{per } |y| < 1 \\ 0 & \text{altrove } (|y| > 1) \end{cases}$$

E il prodotto:

$$f_x(x) \cdot f_y(y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} & \text{per } |x| < 1, |y| < 1 \\ 0 & \text{altrove } (|x| > 1 \vee |y| > 1) \end{cases}$$

Le v.a. non sono indipendenti.

$$\neq f_{xy}(x,y)$$