

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Esercizio n. 1 (A59)

Dovete aprire una porta la cui unica chiave è in un gruppo di 60 chiavi suddivise in tre mazzi di 20 chiavi ciascuno, apparentemente identici.

Scegliete un mazzo a caso e iniziate a provare le chiavi in successione casuale escludendo via via quelle già provate.

Se le prime sei chiavi non aprono la porta quant'è la probabilità che la chiave non sia nel mazzo scelto?

Quesito A59 (Soluzione)

Si definiscano gli eventi:

$C = \{ \text{Il mazzo scelto contiene la chiave} \}$

$F_i = \{ \text{Fallimento alla } i\text{-esima prova} \}$

$E = \{ \text{Le prime 6 prove falliscono} \} = \{ F_1 F_2 \dots F_6 \}$

Si cerca:

$$P(\bar{C}|E) = \frac{P(E|\bar{C}) \cdot P(\bar{C})}{P(E)} \leftarrow \text{Formula di Bayes}$$

Si ha chiaramente: $P(E|\bar{C}) = 1$ e $P(\bar{C}) = \frac{2}{3}$.

Inoltre (Teor. delle prob. totali):

$$P(E) = P(E|\bar{C}) \cdot P(\bar{C}) + P(E|C) \cdot P(C) \quad \leftarrow \frac{1}{3}$$

Dove $P(E|C)$ si può calcolare p.es. con la regola della catena (col condizionamento a C ossia: la chiave c'è):

$$\begin{aligned} P(E|C) &= P(F_1 F_2 \dots F_6 | C) = P(F_1 | C) \cdot P(F_2 | F_1 C) \dots P(F_6 | F_1 \dots F_5 C) \\ &= \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{16}{17} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{14}{15} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} P(E) &= 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{P(\bar{C}|E) = \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{9}{10}} = \frac{20}{27} \approx 0,74} \\ &= \frac{27}{30} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$