

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A6

Il sig. Rossi ha l'abitudine di entrare ogni giorno nel bar B1 o nel bar B2 (scelto a caso) in un istante a caso fra le 10 e le 11 e di intrattenervisi esattamente 10 min per prendere un caffè. Un giorno il sig. Bianchi entra nel bar B1 alle 10:30 e osserva che il sig. Rossi non c'è.
- E' più probabile che il sig. Rossi sia già uscito o che non sia mai entrato? (Si assuma indipendenza fra gli eventi "scelta del bar" e "istante di entrata del sig. Rossi").

Quesito A6 (Soluzione)

Si definiscano i seguenti eventi:

$U = \{ \text{Alle 10:30 il sig. Rossi è già uscito dal bar B1} \}$

$M = \{ \text{Prima delle 10:30 il sig. Rossi non è mai entrato nel bar B1} \}$

$NC = \{ \text{Alle 10:30 il sig. Rossi non c'è, nel bar B1} \}$

Si vogliono confrontare le probabilità condizionate:

$P\{U|NC\}$ e $P\{M|NC\}$ che si possono scrivere (dalla definizione):

$$P\{U|NC\} = \frac{P\{U \cap NC\}}{P\{NC\}} = \frac{P\{U\}}{P\{NC\}}$$

Perché $\{U\}$ è un sottoinsieme di $\{NC\}$ così come lo è $\{M\}$ -

$$P\{M|NC\} = \frac{P\{M \cap NC\}}{P\{NC\}} = \frac{P\{M\}}{P\{NC\}}$$

Data l'uguaglianza dei denominatori sarebbe sufficiente calcolare $P\{U\}$ e $P\{M\}$, ma calcoleremo anche $P\{NC\}$ per completezza -

Definiamo gli ulteriori eventi: $\{B1\} = \{ \text{Il sig. Rossi ha scelto il bar B1} \}$ e $\{B2\}$ analogo per l'altro bar -

Si ha (teorema delle probabilità totali):

$$P\{U\} = P\{U|B1\}P\{B1\} + P\{U|B2\}P\{B2\}$$

$\nwarrow \frac{1}{2} \qquad \nwarrow = 0 \qquad \nwarrow \frac{1}{2}$

Sia X la v.a. {istante di ingresso nel bar B1 a partire dalle 10:00}, la densità di probabilità $f_X(x|B1)$ si può assumere uniforme fra le 10 e le 11 -

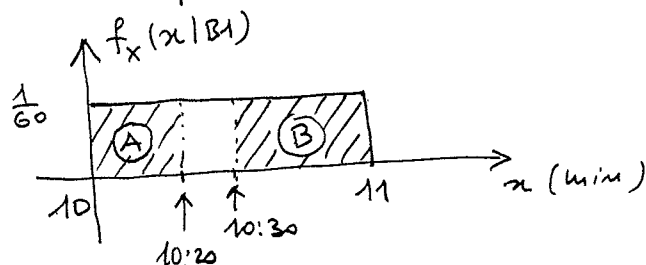
Si ha quindi:

$$P\{U|B1\} = P\{10 < x < 10:20 | B1\} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \quad (\textcircled{A} \text{ in figura})$$

Infatti, data la sosta fissa di 10 min, il rig. Romi alle 10:30 è già uscito se l'istante di ingresso è compreso fra le 10 e le 10:20 -

Per cui:

$$\boxed{P\{U\} = P\{U|B1\}P\{B1\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}}$$



Si ha inoltre:

$$P\{M\} = P\{M|B1\}P\{B1\} + \underbrace{P\{M|B2\}}_{=1}P\{B2\}$$

$\leftarrow = 1$; se sceglie B2 di certo non è entrato in B1 -

Si ha:

$$P\{M|B1\} = P\{10:30 < x < 11 | B1\} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \quad (\textcircled{B} \text{ in figura})$$

Ossia, se è stato scelto B1, la probabilità che non sia entrato prima delle 10:30 ($P\{M|B1\}$) è uguale a quella che l'istante di ingresso sia successivo alle 10:30 -

Per cui:

$$\boxed{P\{M\} = P\{M|B1\}P\{B1\} + P\{B2\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}}$$

Perché $\frac{3}{4} > \frac{1}{6}$ è più probabile che il rig. Romi non sia mai entrato -

Per completezza:

$$P\{NC\} = P\{NC|B1\}P\{B1\} + \underbrace{P\{NC|B2\}}_{=1}P\{B2\}$$

$\leftarrow = 1$; se sceglie B2, alle 10:30 in B1 non c'è di sicuro -

$$P\{NC|B1\} = P\{(10 < x < 10:20) \cup (10:30 < x < 11) | B1\} =$$

$\uparrow$
Alle 10:30 non c'è

$\nwarrow$
È già uscito

$\nwarrow$
Non è ancora entrato

$\leftarrow$ Mutuamente esclusivi!

$$= P\{U|B1\} + P\{M|B1\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \leftarrow P\{NC|B1\}$$

↑
Perché mutuamente esclusivi

E quindi:

$$P\{NC\} = P\{NC|B1\} \cdot P\{B1\} + P\{B2\} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

E le due probabilità da confrontare:

$$\left\{ \begin{array}{l} P\{U|NC\} = \frac{P\{U\}}{P\{NC\}} = \frac{1/6}{11/12} = \frac{2}{11} \\ P\{M|NC\} = \frac{P\{M\}}{P\{NC\}} = \frac{3/4}{11/12} = \frac{9}{11} \end{array} \right.$$

che confermano il risultato già trovato.