

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A60

13/2/13

I cioccolatini di un certo tipo sono venduti singolarmente ed una frazione p di essi ($0 < p < 1$) contiene un biglietto che dà diritto a sceglierne un altro gratis dello stesso tipo.

- a) Definita la v.a. $N = \{\text{Numero di cioccolatini che si ottengono acquistandone uno}\}$, si trovi la distribuzione di probabilità della variabile N , ossia la probabilità: $p_n = P\{N = n\}$, per ogni n intero positivo. *{Facoltativo ma utile: verificare la condizione di normalizzazione}*
- b) Si calcoli il valore medio della v.a. N sopra definita, in funzione di p . Si dica poi quanto dovrebbe valere p per avere un valor medio uguale a 2. *{Può essere utile ricordare che $n \cdot x^{n-1} = D[x^n]$ }*
- c) Se cinque amici acquistano un cioccolatino ciascuno, si trovi la probabilità P_A che due (soli) di essi ottengano più di un cioccolatino, assumendo $p = 0,2$.

Quesito A60 (soluzione)

Si può assumere che la probabilità di scegliere un cioccolatino che dà diritto al premio sia uguale a p .

- a) Il numero di cioccolatini ottenuti acquistandone uno è uguale a n se quello acquistato dà diritto al premio, se quello scelto come premio dà ancora diritto al premio e così via per $(n-1)$ cioccolatini seguiti da un n -esimo cioccolatino normale - Assumendo che le scelte siano indipendenti si ha quindi:

$$\boxed{p_n = P\{N=n\} = \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{(n-1)} \cdot (1-p) = p^{n-1} \cdot (1-p) \text{ per } n=1,2,\dots}$$

- b) Il valor medio di N è, dalla definizione:

$$\boxed{E\{N\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot p^{n-1} (1-p) = (1-p) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dp} [p^n] =}$$

$$= (1-p) \cdot \frac{d}{dp} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} p^n \right] = (1-p) \cdot \frac{d}{dp} \left[-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p^n \right] =$$

$$= (1-p) \frac{d}{dp} \left[-1 + \frac{1}{1-p} \right] = (1-p) \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{q}$$

Dove è stato posto $q \triangleq (1-p)$.

Il risultato doveva essere ottenuto trattandosi di una v.a. geometrica di parametro q . (Vedi il documento: 1

"V.a. discrete notevoli: medie, varianze, normalizzazione")

c) La probabilità che una persona ottenga più di un cioccolatino è uguale alla probabilità che il primo cioccolatino (quello acquistato) dia diritto al premio: tale probabilità è uguale a p — Siamo quindi in un caso di prove ripetute con probabilità di successo p —

Si ha allora:

$$P_A = \text{Prob} \{ 2 \text{ successi in } 5 \text{ prove} \} = \binom{5}{2} p^2 \cdot (1-p)^{5-2}$$

Assumendo poi $p = 0,2$ si ha:

$$P_A = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 \approx 0,205$$

Verifica di normalizzazione (Facoltativa) —

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} (1-p) = (1-p) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} = (1-p) \cdot \frac{1}{(1-p)} = 1 \quad \text{o.k.}$$