

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A61 13/2/13

Le v.a. X e Y sono indipendenti con densità di probabilità, rispettivamente:

$$f_X(x) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) ; \quad f_Y(y) = 2e^{-2y}u(y)$$

Si trovi la densità di probabilità della v.a. $Z = X + Y$

Quesito A61 (Soluzione)

Essendo le v.a. X e Y indipendenti la densità di probabilità della somma è uguale alla convoluzione delle due densità, si ha cioè:

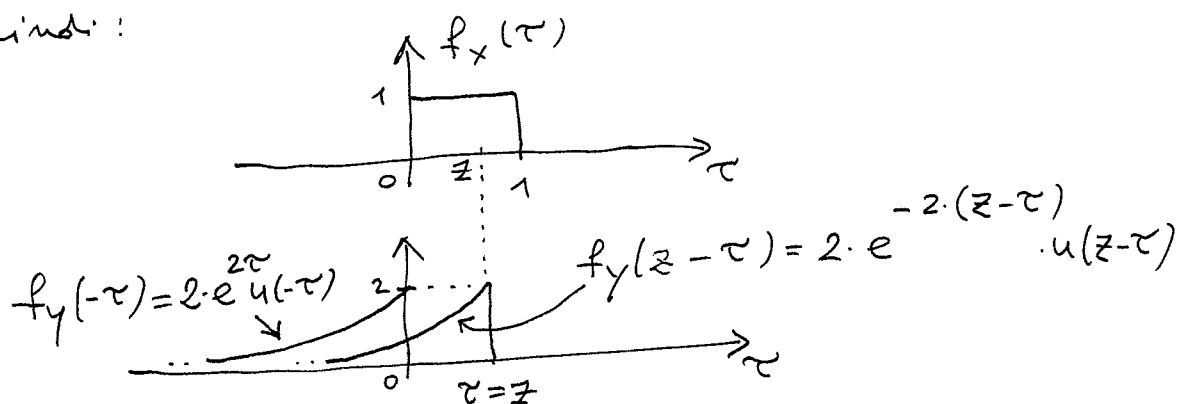
$$f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\tau) f_Y(z - \tau) d\tau$$

Le densità nel caso proposto sono:

$$f_X(x) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{graph of } f_X(x) \\ \text{A rectangular pulse from } x=0 \text{ to } x=1 \text{ with height 1.} \end{array}$$

$$f_Y(y) = 2 \cdot e^{-2y} u(y) \rightarrow \begin{array}{c} \text{graph of } f_Y(y) \\ \text{An exponential decay starting at } y=0 \text{ with height 2.} \end{array}$$

E quindi:



Dai grafici si ricava che la convoluzione è nulla per $z < 0$, mentre per $z > 0$ si hanno due casi:

Caso $0 < z < 1$

$$f_Z(z) = \int_0^z \underbrace{1}_{f_X(\tau)} \cdot \underbrace{2 \cdot e^{-2(z-\tau)}}_{f_Y(z-\tau)} d\tau = 2 \cdot e^{-2z} \int_0^z e^{2\tau} d\tau =$$

$$= 2 \cdot e^{-2z} \left[\frac{e^{2\tau}}{2} \right]_0^z = e^{-2z} (e^{2z} - 1) = 1 - e^{-2z}, \text{ per } 0 < z < 1$$

Caso $z > 1$

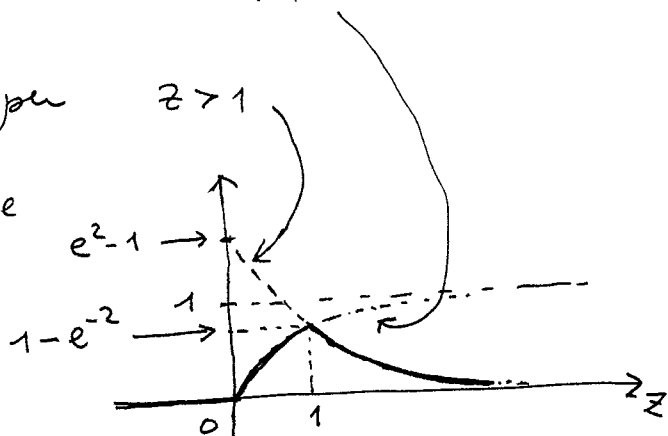
$$f_Z(z) = \int_1^1 1 \cdot 2 \cdot e^{-2 \cdot (z-\tau)} d\tau = \cancel{2} \cdot e^{-2z} \left[\frac{e^{2\tau}}{2} \right]_0^1 = e^{-2z} (e^2 - 1)$$

per $z > 1$

Riassumendo:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-2z} & \text{per } 0 < z < 1 \\ e^{-2z} (e^2 - 1) & \text{per } z > 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il grafico è:



{ Verifica di normalizzazione (non richiesta)

$$\int_0^1 (1 - e^{-2z}) dz = \left[z - \frac{e^{-2z}}{-2} \right]_0^1 = \left(1 - \frac{e^{-2}}{-2} \right) - \left(0 - \frac{1}{-2} \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2} \quad \text{(A)}$$

$$(e^2 - 1) \cdot \int_1^{+\infty} e^{-2z} dz = (e^2 - 1) \cdot \left[\frac{e^{-2z}}{-2} \right]_1^{+\infty} = (e^2 - 1) \cdot \frac{0 - e^{-2}}{-2} = \frac{(e^2 - 1) \cdot e^{-2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2} \quad \text{(B)}$$

Sommando (A) e (B): $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2} = 1$
come atteso ↑