

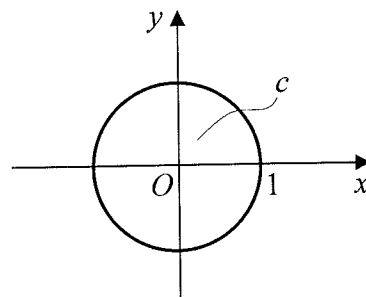
Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A62

13/2/13

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y ha valore costante $c = 1/\pi$ nel dominio indicato in figura (circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine) ed è nulla altrove.

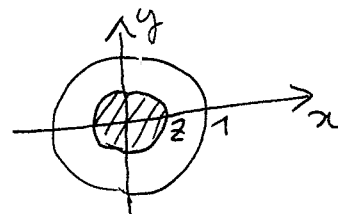
Si trovino la funzione di distribuzione $F_Z(z)$ e la densità di probabilità $f_Z(z)$ della v.a. $Z = \{\text{Distanza dall'origine del punto di coordinate } (X, Y)\}$ e si traccino anche i grafici delle funzioni trovate.



Quesito A62 (Soluzione)

Si ha, per definizione: $F_Z(z) = P\{Z \leq z\}$ - Quest'ultima è la probabilità che $Z = \{\text{distanza dall'origine del punto } (x, y)\}$ (o uguale a) sia minore di z , che ovviamente è uguale alla probabilità che il punto (x, y) si trovi entro il cerchio di raggio z centrato nell'origine (tratteggiato in figura) -

Tale probabilità è data (per $0 < z < 1$) dal



Volume del cilindro di raggio z e altezza $c = \frac{1}{\pi}$ quindi:

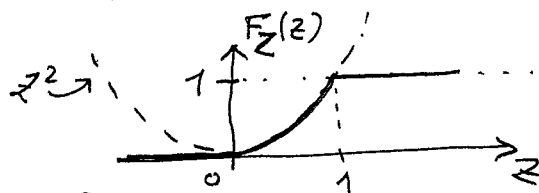
$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = \pi \cdot z^2 \cdot \frac{1}{\pi} = z^2 \quad \text{per } 0 \leq z < 1$$

Per $z \geq 1$ si ha: $F_Z(z) = P\{Z \leq 1\} = 1$

e per $z < 0$ si ha: $F_Z(z) = 0$ perché Z è sempre ≥ 0 .

Si ha quindi:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{per } z < 0 \\ z^2 & \text{per } 0 \leq z < 1 \\ 1 & \text{per } z \geq 1 \end{cases}$$



E la densità è:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} 2z & \text{per } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

