

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A64

In figura è schematizzato un canale di trasmissione binario.

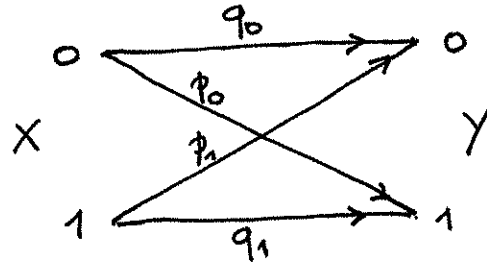
Il simbolo trasmesso è una v.a. discreta X che può assumere i valori $\{0,1\}$. Anche il simbolo ricevuto è una v.a. discreta Y che può assumere i valori $\{0,1\}$ ma a causa di disturbi di trasmissione può verificarsi un errore ossia l'evento: $\mathcal{E} = \{X \neq Y\}$.

Il canale è caratterizzato dalle seguenti probabilità (dette di transizione):

$$p_0 = P\{Y=1 | X=0\}, \quad p_1 = P\{Y=0 | X=1\}, \\ q_0 = P\{Y=0 | X=0\}, \quad q_1 = P\{Y=1 | X=1\}.$$

Si assumano i seguenti valori:

$$P\{X=0\} = 0,5; \quad p_0 = 0,1; \quad p_1 = 0,2.$$



- Si trovino le probabilità $P\{Y=0\}$ e $P\{Y=1\}$.
- Se all'uscita si osserva uno 0 (ossia si osserva che Y ha assunto valore 0) quant'è la probabilità che il valore di X trasmesso fosse 0?
- Si calcoli la probabilità di errore sul canale, ossia la probabilità $P(\mathcal{E})$.
- Si dica se le v.a. X e Y sono indipendenti giustificando la risposta.

Quesito A64 (Soluzione)

Preliminarmente si osserva che i valori q_0 e q_1 (probabilità di corretta trasmissione condizionate al simbolo trasmesso) si ricavano immediatamente dai dati p_1 e p_2 (prob. di errata trasmissione (condizionate)), infatti:

$$q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0,1 = 0,9; \quad q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,2 = 0,8$$

- a) Gli eventi $\{X=0\}$ (viene trasmesso uno zero) e $\{X=1\}$ (viene trasmesso uno uno) rappresentano una partizione dello spazio ambiente, per il calcolo di $P\{Y=0\}$ o $P\{Y=1\}$ si può quindi applicare il teorema delle prob. totali:

$$\boxed{P\{Y=0\} = P\{Y=0|X=0\} \cdot P\{X=0\} + P\{Y=0|X=1\} \cdot P\{X=1\} =} \\ = q_0 \cdot P\{X=0\} + p_1 \cdot P\{X=1\} = 0,9 \cdot \frac{1}{2} + 0,2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{0,55}}$$

e:

$$\boxed{P\{Y=1\} = 1 - P\{Y=0\} = 1 - 0,55 = \boxed{0,45}}$$

b) La probabilità che, avendo ricevuto uno zero ($Y=0$) sia stato effettivamente trasmesso uno zero ($X=0$) si può calcolare usando la formula di Bayes e i dati forniti e ricavati:

$$\boxed{P\{X=0|Y=0\} = \frac{P\{Y=0|X=0\} \cdot P\{X=0\}}{P\{Y=0\}} = \frac{0,9 \cdot 0,5}{0,55} = \frac{9}{11} = 0,818}$$

c) La probabilità di errore sul canale (prob. dell'evento $E = \{X \neq Y\}$) si può calcolare usando ancora il teorema delle probabilità totali:

$$\begin{aligned} \boxed{P\{E\}} &= P\{E|X=0\} \cdot P\{X=0\} + P\{E|X=1\} \cdot P\{X=1\} = \\ &= P\{Y=1|X=0\} \cdot P\{X=0\} + P\{Y=0|X=1\} \cdot P\{X=1\} = \\ &= p_0 \cdot \frac{1}{2} + p_1 \cdot \frac{1}{2} = (0,1 + 0,2) \cdot \frac{1}{2} = \boxed{0,15} \end{aligned}$$

d) Le v.a. X e Y sono indipendenti se si verifica:

$$P\{X=i, Y=j\} = P\{X=i\} \cdot P\{Y=j\} \text{ per ogni coppia } i, j \in \{0, 1\}$$

Vediamo un caso:

$$P\{X=0, Y=1\} = P\{Y=1|X=0\} \cdot P\{X=0\} = p_0 \cdot \frac{1}{2} = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05$$

da confrontare con:

$$P\{X=0\} \cdot P\{Y=1\} = 0,5 \cdot 0,45 = 0,225$$

← Dal punto a)

↖ Diversi, quindi le v.a. non sono indipendenti

Nota - Trattandosi di un canale di trasmissione si desidera che il simbolo ricevuto (v.a. Y) sia fortemente dipendente da quello trasmesso (v.a. X), anzi idealmente si vorrebbe che $Y=X$ (massima dipendenza) - La situazione di indipendenza, che si verifica p. es. con $p_1=q_1=p_0=q_0=\frac{1}{2}$, fa sì che i simboli ricevuti non abbiano alcuna attinenza con quelli trasmessi e il canale sia quindi inutilizzabile per trasmettere informazione.

2