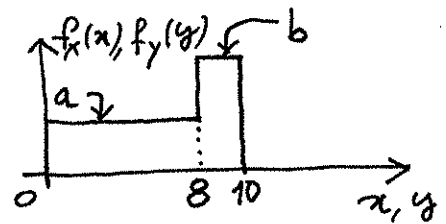


Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quanto A65

Due v.a. indipendenti X e Y hanno identica densità di probabilità, come in figura.

- a) Si calcoli la probabilità $P\{X > 2Y\}$ in funzione di a e b .
b) Sapendo che $\eta = E\{X\} = E\{Y\} = 8$, si trovino i valori di a e b e si dica quanto vale la probabilità trovata al punto precedente in tal caso.



Quanto A65 (Soluzione)

a) Si ha: $P\{X > 2Y\} = P\{(X, Y) \in D\} = \int_D f_{xy}(x, y) dx dy$

dove D è il dominio del piano cartesiano in cui è verificata la disuguaglianza: $x > 2y$ ovvero $y < \frac{x}{2}$: si tratta della regione tratteggiata in figura.

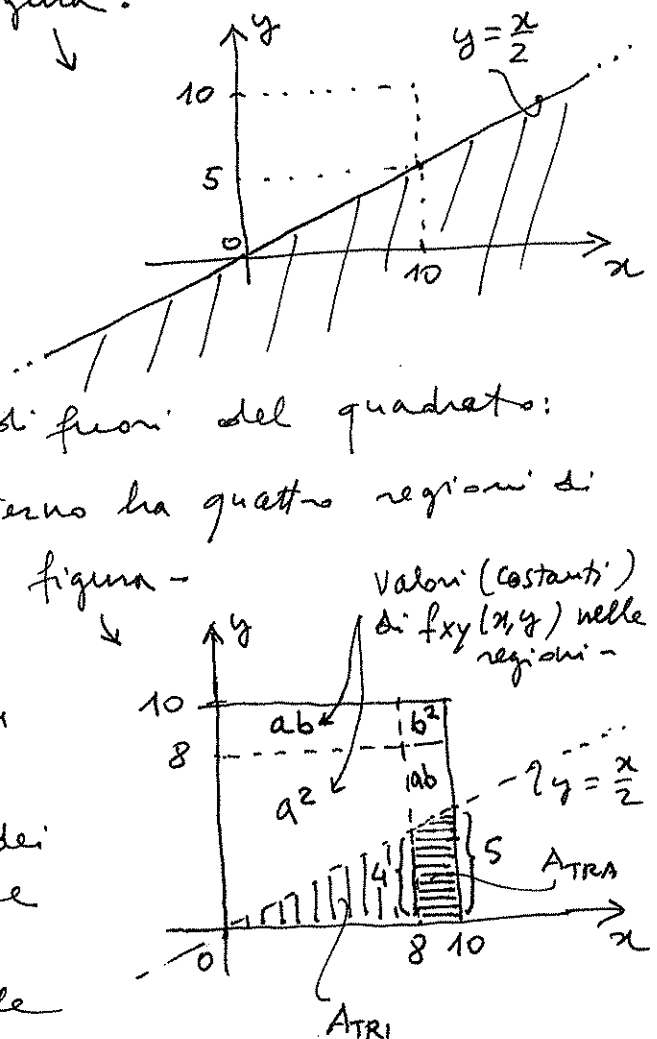
Dato l'indipendenza di X e Y la densità di probabilità congiunta è:

$$f_{xy}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

che vale zero per (x, y) al di fuori del quadrato:

$0 < x < 10$, $0 < y < 10$, e all'interno ha quattro regioni di valore costante come indicato in figura -

Il valore dell'integrale è un volume che si può calcolare, in questo caso, con la geometria elementare sommando i volumi dei prismi triangolare e trapezoidale che si trovano moltiplicando le aree di base A_{TRI} , A_{TRA} per le rispettive altezze: a^2 e ab . Quindi:



$$\int_D f_{xy}(x,y) dx dy = a^2 \cdot A_{TRI} + ab \cdot A_{TRA}$$

dove: A_{TRI} è l'area del triangolo: $A_{TRI} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$

A_{TRA} è l'area del trapezio: $A_{TRA} = \frac{(5+4) \cdot 2}{2} = 9$

Quindi la probabilità cercata (in funzione di a e b) è:

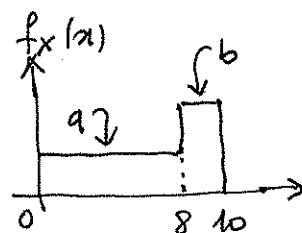
$$P\{X > 2Y\} = a^2 \cdot 16 + ab \cdot 9$$

b) Il valore medio di X (uguale a quello di Y) si ricava dalla definizione:

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^8 x \cdot a dx + \int_8^{10} x \cdot b dx = a \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^8 + b \frac{1}{2} x^2 \Big|_8^{10} = \\ &= \frac{1}{2} \left[a(64-0) + b(\underbrace{100-64}_{\leftarrow 36}) \right] = 32 \cdot a + 18 \cdot b \quad (1) \end{aligned}$$

Dato γ il v.m. $E\{X\}$, i valori di a e b si possono ricavare dalla relazione (1), noto γ , e ricorrendo che per la normalizzazione deve essere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \longrightarrow 8 \cdot a + 2 \cdot b = 1$$



Si ha quindi il sistema:

$$\begin{cases} 32a + 18b = \gamma \\ 8a + 2b = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{\gamma-4}{40} \\ b = \frac{\gamma-4}{10} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{che nel caso} \\ \text{proporzionale:} \\ E\{X\} = \gamma = 8 \text{ da } \nearrow \end{array} \begin{cases} a = \frac{1}{40} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Con i valori trovati si ha quindi:

$$\boxed{P\{X > 2Y\} = 16 \cdot a^2 + 9 \cdot ab = 16 \cdot \left(\frac{1}{40}\right)^2 + 9 \cdot \frac{1}{40} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{100} + \frac{9}{100} = \frac{1}{10}}$$