

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A77 rid

La riunione di un certo gruppo di persone è convocata per le ore 11:00. Il gruppo è composto da n persone che arrivano indipendentemente con un ritardo che è una v.a. R avente densità $f_R(x)$ uniforme fra i valori $a = -5$ e $b = 15$ minuti, uguale per tutti (Nota: ritardo negativo = anticipo).

La riunione ha inizio non appena sono arrivati tutti i partecipanti.

a) Si trovi la funzione di distribuzione $F_X(x)$ e la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a.

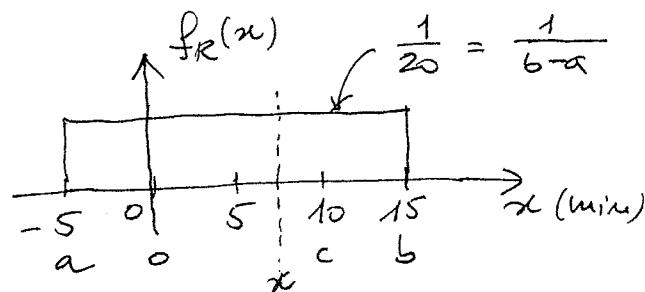
$X = \{\text{Ritardo di inizio della riunione (rispetto alle ore 11:00)}\}$

b) Si traccino i grafici di $F_X(x)$ e di $f_X(x)$ nel caso $n = 2$.

Quesito A82 (Soluzione)

La densità di probabilità $f_R(x)$ del ritardo R di un generico partecipante (densità uguale per tutti i partecipanti) è:

$$f_R(x) = \frac{1}{20} \Pi\left(\frac{x-5}{20}\right) \text{ min}^{-1}$$



e la funzione di distribuzione:

$$F_R(x) = P\{R \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{per } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{per } a \leq x < b \\ 1 & \text{per } x \geq b \end{cases}$$

L'istante di inizio della riunione è l'istante di arrivo dell'ultimo partecipante quindi il ritardo X di inizio della riunione è il ritardo dell'ultimo partecipante -

a) Si cerca: $F_X(x) = P\{X \leq x\} =$

$= P\{\text{Ritardo dell'ultimo arrivato} \leq x\} =$

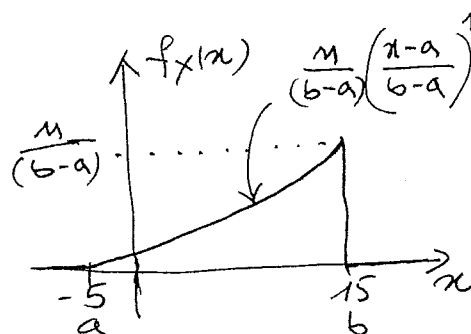
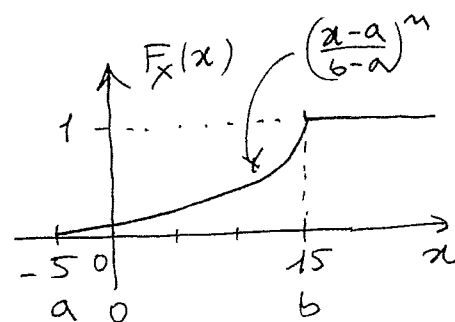
$= P\{\text{Arrivano tutti con ritardo} \leq x\} =$

$= P\{n \text{ punti in } (a, x)\} = \phi^n$

dove $\phi = P\{\text{Un generico partecipante arriva con ritardo in } (a, x)\} = F_R(x)$

Quindi:

$$F_X(x) = [F_R(x)]^n = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n & \text{per } a < x < b \\ 1 & \text{per } x > b \end{cases}$$

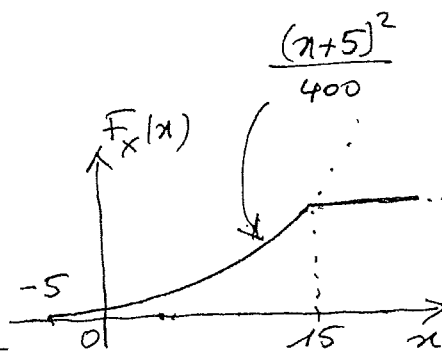


e la densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} n \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

b) Siano $a = -5$, $b = 15$, $n = 2$, si ha

$$F_X(x) = \left(\frac{x+5}{15+5}\right)^2 = \frac{1}{400} (x+5)^2 \quad \text{per } -5 \leq x \leq 15$$



$$f_X(x) = 2 \cdot \left(\frac{x+5}{15+5}\right) \cdot \frac{1}{15+5} = \frac{(x+5)}{200} \quad \text{per } -5 \leq x \leq 15$$

