

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A81

Marco e un gruppo di sette amici, in tutto quattro ragazze e quattro ragazzi, si incontrano per una cena. Il tavolo per la cena è tondo e i posti sono numerati. Il gruppo decide di assegnare i posti a caso estraendo ciascuno il numero del proprio posto. Si calcolino le seguenti probabilità:

- a) P_A : che Marco abbia ai lati due ragazzi; b) P_B : che Marco abbia ai lati un ragazzo e una ragazza; c) P_C : che Marco abbia ai lati due ragazze.

Quesito A81 (Soluzione)

Nel seguito si indicherà con M (maschio) un ragazzo generico, con F (femmina) una ragazza generica e con S_x e D_x i posti a sinistra e a destra di Marco, rispettivamente -

1° metodo (Coppie non ordinate)

- a) Data la casualità dell'assegnazione dei posti, la probabilità che Marco abbia ai lati due ragazzi è uguale alla probabilità di estrarre una coppia non ordinata di ragazzi da uno spazio campione uniforme formato da 3 ragazzi (3M) e 4 ragazze (4F) - Utilizzando le coppie non ordinate si ha:

$$\begin{aligned} P_A &= P \{ \text{Estrazione di una coppia (non ordinate) di M da un insieme di 3M e 4F} \} = \\ &= \frac{\text{n° coppie (non ord.) di M}}{\text{n° coppie (non ord.) totali}} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}}{\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}} = \frac{1}{7} \approx 0,143 \end{aligned}$$

- b) La probabilità che Laura abbia ai lati un ragazzo e una ragazza si può scrivere così:

$$P_B = P\{(M a S_x, F a D_x) \cup (F a S_x, M a D_x)\} =$$

↔ Mutuamente esclusivi

$$= P\{M a S_x, F a D_x\} + P\{F a S_x, M a D_x\} =$$

$$= P\{M a S_x\} \cdot P\{F a D_x | M a S_x\} + P\{F a S_x\} \cdot P\{M a D_x | F a S_x\} =$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{7} \approx 0,571$$

← Dalle definizioni di prob. condizionata o dalla regola della catena

N.B. - Poiché il calcolo di P_C (vedi oltre) è analogo a quello di P_A , si potevano calcolare per prime queste due probabilità e ricavare P_B da: $P_B = 1 - P_A - P_C$, dovendo comunque essere: $P_A + P_B + P_C = 1$

c) Si procede analogamente al caso a):

$$P_C = \frac{\text{n° coppie (non ord.) di F}}{\text{n° coppie (non ord.) totali}} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}}{\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}} = \frac{2}{7} \approx 0,286$$

2° metodo (Coppie ordinate)

Si può procedere anche considerando le coppie ordinate di vicini di Marco - Si osservi che:

$$\text{— n° coppie ordinate totali} = D_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = 6 \cdot 7 = 42$$

(Si veda anche lo schema nella pagina seguente:

tutte le caselle meno la diagonale: $7 \times 7 - 7 = 42$)

$$\text{— n° coppie ordinate di ragazze (F)} = D_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

(Nello schema: le caselle nel quadrato

in alto a sinistra meno la diagonale: $4 \times 4 - 4 = 12$)

- n° coppie M a Sx, F a Dx e viceversa = $4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$

(Nello schema: le caselle nei rettangoli in alto a destra e in basso a sinistra)

- n° coppie ordinate di ragazzi (M) = $D_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \cdot 2 = 6$

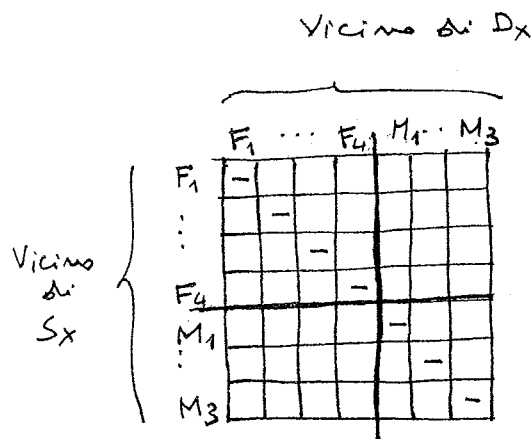
(Nello schema: le caselle nel quadrato in basso a destra meno la diagonale: $3 \times 3 - 3 = 6$)

E quindi le probabilità:

$$a) P_A = \frac{D_{3,2}}{D_{7,2}} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

$$b) P_B = \frac{24}{D_{7,2}} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

$$c) P_C = \frac{D_{4,2}}{D_{7,2}} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$



3° metodo Permutazioni

Si possono considerare anche le permutazioni degli otto partecipanti intorno al tavolo -

Le permutazioni totali sono $P_8 = D_{8,8} = 8!$

a) Il n° di permutazioni che hanno due ragazzi ai lati di Marco si ottiene moltiplicando il n° di possibili posizioni di Marco (8) per il numero di disposizioni (coppie ordinate di due ragazzi) possibili con i tre presenti ($D_{3,2}$) per il n° di possibili permutazioni dei cinque partecipanti rimanenti ($P_5 = D_{5,5} = 5!$)

e quindi:

$$P_A = \frac{8 \cdot D_{3,2} \cdot D_{5,5}}{D_{8,8}} = \frac{8 \cdot \frac{3!}{(3-2)!} \cdot 5!}{8!} = \frac{8 \cdot \frac{3!}{1!} \cdot 5!}{8!} = \frac{8 \cdot (3 \cdot 2) \cdot 5!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

b) Il n° di permutazioni che hanno un ragazzo e una ragazza ai lati di Marco si ricava dalla precedente sostituendo a $D_{3,2}$ il n° di coppie $M a S_x, F a D_x$ e viceversa: $(4 \times 3 + 3 \times 4)$ - Quindi:

$$\left[P_B = \frac{8(4 \cdot 3 + 3 \cdot 4) \cdot D_{5,5}}{D_{8,8}} = \frac{8 \cdot (24) 5!}{8!} = \frac{8 \cdot 24 \cdot \cancel{5!}}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7} \right]$$

c) Il n° di permutazioni che hanno due ragazze ai lati di Marco si ricava come in a) sostituendo a $D_{3,2}$ il n° di coppie ordinate di ragazze (disponibili) possibili con le quattro ragazze presenti $\longrightarrow : D_{4,2}$ - Quindi:

$$\left[P_C = \frac{8 \cdot D_{4,2} \cdot D_{5,5}}{D_{8,8}} = \frac{8 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} 5!}{8!} = \frac{8 \cdot (4 \cdot 3) \cdot \cancel{5!}}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7} \right]$$