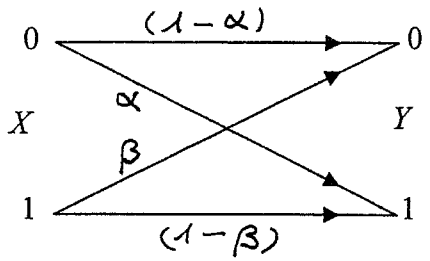
Esame di

TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A84

In figura è schematizzato un canale di trasmissione binario.
Il simbolo trasmesso è una v.a. discreta X che può assumere i valori $\{0,1\}$. Anche il simbolo ricevuto è una v.a. discreta Y che può assumere i valori $\{0,1\}$ ma a causa di disturbi di trasmissione può verificarsi un errore ossia l'evento: $\mathcal{E} = \{X \neq Y\}$.
Il canale è caratterizzato dalle seguenti probabilità (dette *di transizione*):



$\alpha = P\{Y=1 \mid X=0\}$, $\beta = P\{Y=0 \mid X=1\}$,
$(1-\alpha) = P\{Y=0 \mid X=0\}$, $(1-\beta) = P\{Y=1 \mid X=1\}$.

Sia inoltre $P\{X=0\} = p_0$.

a) Si scriva la probabilità di errore sul canale, ossia la probabilità $p_e = P(\mathcal{E})$ in funzione di α, β, p_0 .

b) Si scrivano le probabilità congiunte $P\{X=i, Y=j\}$ per ogni coppia $i,j \in \{0, 1\}$, in funzione di α, β, p_0 .
Essendo X e Y una coppia di v.a. discrete, è noto che la funzione di distribuzione congiunta $F_{XY}(x, y)$ assume solo valori costanti in determinate regioni del piano x, y.
c) Sul piano x, y si individuino tutte le regioni in cui $F_{XY}(x, y)$ assume i suoi possibili valori scrivendo per ciascuna regione il rispettivo valore di $F_{XY}(x, y)$ in funzione di α, β, p_0.

Un *"byte trasmesso"* è una stinga di 8 bit i cui bit vengono trasmessi attraverso il canale ciascuno indipendentemente dagli altri. La stringa dei corrispondenti bit ricevuti è detta *"byte ricevuto"* e può contenere un certo numero k di bit errati (ossia diversi da quelli trasmessi) con k che può assumere naturalmente tutti i valori interi da zero (byte ricevuto corretto) a 8.
d) Assumendo $\alpha = \beta$ (canale cosiddetto *simmetrico*) ed anche $P\{X=0\} = p_0 = ½$, si trovi quale valore debba avere α affinché accada che:
$P\{k=0\} = 10 \cdot P\{k=1\}$ ossia che la probabilità che il byte ricevuto sia privo di errori (byte corretto) sia dieci volte maggiore della probabilità che tale byte contenga un solo errore (in una posizione qualunque).

Quesito A 84 (Soluzione)

a) Gli eventi $\{X=0\}$ (viene trasmesso uno zero) e $\{X=1\}$ (viene trasmesso un uno) rappresentano una partizione dello spazio campione quindi la probabilità di errore $P(\mathcal{E})$ si può calcolare applicando il teorema delle probabilità totali:

$$p_e = P\{\mathcal{E}\} = P\{X \neq Y\} = P\{\mathcal{E}/X=0\} \cdot P\{X=0\} + P\{\mathcal{E}/X=1\} \cdot P\{X=1\} =$$

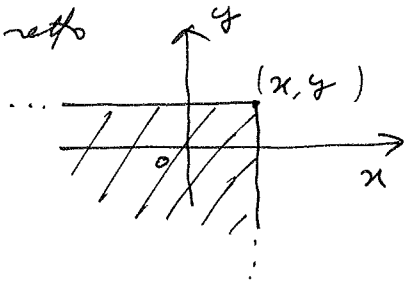
$$= P\{Y=1/X=0\} \cdot P\{X=0\} + P\{Y=0/X=1\} \cdot P\{X=1\} =$$

$$= \alpha \cdot p_0 + \beta \cdot (1-p_0)$$

b) le quattro probabilità congiunte richieste $P\{X=i, Y=j\}$ per $i,j \in \{0,1\}$ si possono scrivere (ricordando la definizione di prob. condizionata):

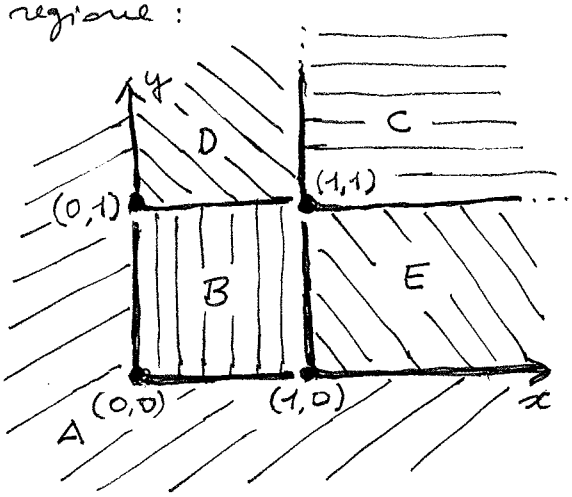
$$\left[\begin{array}{l} P\{X=0, Y=0\} = P\{Y=0/X=0\} \cdot P\{X=0\} = (1-\alpha)\cdot p_0 \\ P\{X=0, Y=1\} = P\{Y=1/X=0\} \cdot P\{X=0\} = \alpha p_0 \\ P\{X=1, Y=0\} = P\{Y=0/X=1\} \cdot P\{X=1\} = \beta \cdot (1-p_0) \\ P\{X=1, Y=1\} = P\{Y=1/X=1\} = P\{X=1\} = (1-\beta)(1-p_0) \end{array}\right]$$

c) È noto che è $F_{XY}(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$. Questa funzione assume, in ogni punto (x,y) del piano cartesiano, un valore uguale alla massa totale di probabilità che si trova nella regione del piano $\{X \le x, Y \le y\}$ che è un angolo retto come in figura →



Si hanno quindi le seguenti regioni e i corrispondenti valori (costanti) che $F_{XY}(x,y)$ assume in ogni punto della regione:

N.B.!



— Regione A: $(X \le 0) \cup (Y \le 0)$

$F_{XY}(x,y) = \boxed{0}$ (nessuna massa di prob.)

— Regione B: $(0 \le X < 1) \cap (0 \le Y < 1)$

$F_{XY}(x,y) = P\{X=0, Y=0\} = \boxed{(1-\alpha)\cdot p_0}$

— Regione C: $(X \ge 1) \cap (Y \ge 1)$

$F_{XY}(x,y) = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=1\} = \boxed{1}$

— Regione D: $(0 \le X < 1) \cap (Y \ge 1)$

$F_{XY}(x,y) = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = (1-\alpha)\cdot p_0 + \alpha p_0 = p_0$

— Regione E: $(X \ge 1) \cap (0 \le Y < 1)$

$F_{XY}(x,y) = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=0\} = \boxed{(1-\alpha)\cdot p_0 + \beta\cdot(1-p_0)}$

d) Assumendo $\alpha = \beta$ e $p_0 = \frac{1}{2}$ la probabilità di errore diventa:

$$\boxed{p_e = \alpha \cdot p_0 + \beta \cdot (1 - p_0) = \alpha \cdot \frac{1}{2} + \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \alpha}$$

Le probabilità che il byte ricevuto abbia zero errori ($k=0$) oppure un errore ($k=1$) si calcolano rispettivamente come probabilità di avere zero oppure un errore su otto trasmissioni (prove ripetute). Quindi il valore di α richiesto si trova con i seguenti passaggi:

$$P\{k=0\} = 10 \cdot P\{k=1\}$$

$$\binom{8}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^8 = 10 \cdot \binom{8}{1} \alpha^1 (1-\alpha)^7$$

$$1 \cdot 1 \cdot (1-\alpha)^{\cancel{8}\,1} = 10 \cdot 8 \cdot \alpha \, (1-\alpha)^{\cancel{7}}$$

$$(1-\alpha) = 80 \cdot \alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{81} \simeq 0{,}012}$$