

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A85

Una variabile aleatoria Y è ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione

$$Y = e^X$$

a) Si trovi la densità di probabilità $f_Y(y)$ della v.a. Y sapendo che la densità della X è la seguente:

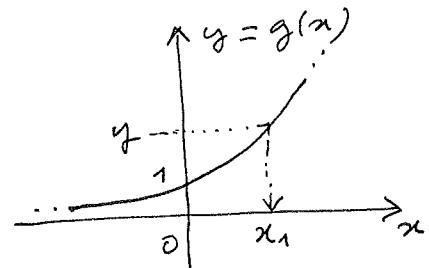
$$f_X(x) = 2e^{-2x} u(x)$$

b) Si trovi il valor medio della v.a. Y senza usare la densità $f_Y(y)$ trovata al punto precedente.

Quesito A85 (Soluzione)

a) Si può applicare il teorema fondamentale -

La funzione $y = g(x) = e^x$ è rappresentata in figura -
Si nota subito che l'equazione $y = e^x$ non ha soluzioni per



$y \leq 0$ per cui sarà $f_Y(y) = 0$ per $y \leq 0$ - Si ha poi una soluzione x_1 per ogni $y > 0$ ed è:

$$x_1 = \ln y, \text{ per } y > 0.$$

Si osservi anche che: $g'(x) = x \rightarrow g'(x_1) = e^{x_1} = y$ per $y > 0$

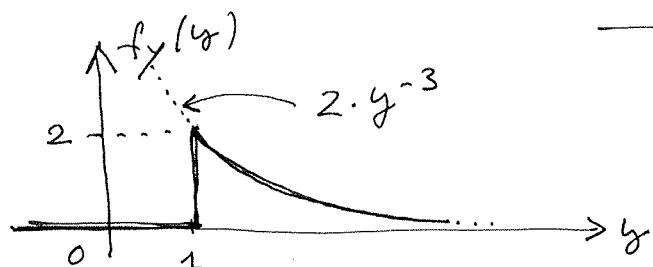
Essendo $f_X(x) = 2 \cdot e^{-2x} u(x)$, applicando il teorema fondamentale si ottiene:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{2 \cdot e^{-2x_1} \cdot u(x_1)}{|e^{x_1}|} & \text{per } y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2 \cdot e^{-2 \cdot \ln y} \cdot u(\ln y)}{|y|} = \frac{2 \cdot e^{\ln(y^{-2})}}{|y|} = \frac{2 \cdot y^{-2}}{|y|} = 2 \cdot y^{-3} & \text{per } y > 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

= 1 per $\ln y > 0 \rightarrow y > 1$

il cui grafico è in figura $\rightarrow$



b) Per trovare il v.m. di y si può usare il teorema dell'aspettazione:

$$\begin{aligned} \boxed{\mu_y = E\{y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x) dx =} \\ = \int_0^{+\infty} e^x \cdot 2e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} 2 \cdot e^{-x} dx = \\ = 2 \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^{+\infty} = 2 \cdot \left[\frac{e^{-\infty} - 1}{-1} \right] = 2 \end{aligned}$$

Verifica di normalizzazione -

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_y(y) dy = \int_1^{+\infty} 2 \cdot y^{-3} dy = 2 \cdot \left[\frac{y^{-2}}{-2} \right]_1^{+\infty} = 2 \cdot \left[\frac{0-1}{-2} \right] = 1 \quad \underline{\text{ok.}}$$