

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A86

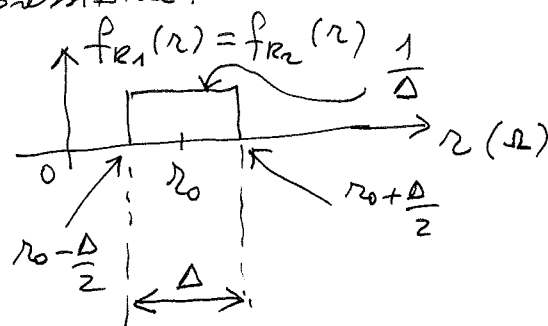
Una macchina produce resistori le cui resistenze sono variabili aleatorie indipendenti aventi tutte identica distribuzione uniforme fra $r_0 - \Delta/2$ e $r_0 + \Delta/2$. Per realizzare un circuito si prelevano a caso due di tali resistori e si collegano in serie. Si misura la resistenza della serie e se questa si discosta dal valore $2r_0$ per più di a ohm (in più o in meno) il circuito viene scartato.

Detta p_s la probabilità che il circuito venga scartato, si trovi il valore di Δ (espresso in funzione degli altri parametri) che renda la probabilità di scarto uguale al 4 % (ossia: $p_s = 4 \cdot 10^{-2}$).

Quesito A86 (Soluzione)

Siano R_1 e R_2 le resistenze (variabili aleatorie) dei due resistori collegati in serie - la resistenza totale della serie è quindi la v.a. $R_{TOT} = R_1 + R_2$ la cui densità di probabilità è data dalla convoluzione delle densità di probabilità di R_1 e R_2 poiché sono indipendenti - le due densità sono uguali ed hanno espressione:

$$f_{R_1}(r) = f_{R_2}(r) = \Pi\left(\frac{r-r_0}{\Delta}\right) \cdot \frac{1}{\Delta}$$

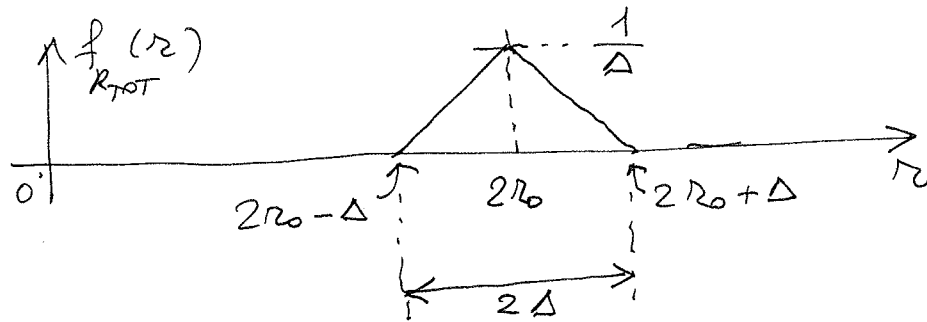


La densità di probabilità di R_{TOT} è quindi:

$$f_{R_{TOT}}(r) = f_{R_1}(r) * f_{R_2}(r) = \frac{1}{\Delta^2} \Pi\left(\frac{r-r_0}{\Delta}\right) * \Pi\left(\frac{r-r_0}{\Delta}\right)$$

È noto che la convoluzione di una funzione $\Pi(\cdot)$ con se stessa dà luogo a una funzione $\Lambda(\cdot)$ - Si osserva inoltre che il valor medio di R_1 e R_2 è r_0 (per la simmetria di $f_{R_1}(r)$) quindi il valor medio di R_{TOT} deve essere: $E\{R_{TOT}\} = E\{R_1\} + E\{R_2\} = 2r_0$, per la linearità del valor medio - Dalla convoluzione ci si deve quindi attendere una funzione triangolare centrata in $2r_0$ - E seguendo la convoluzione si ottiene infatti:

$f_{R_{TOT}}(r) = \frac{1}{\Delta} \wedge \left(\frac{r - 2r_0}{\Delta} \right)$ il cui grafico è:

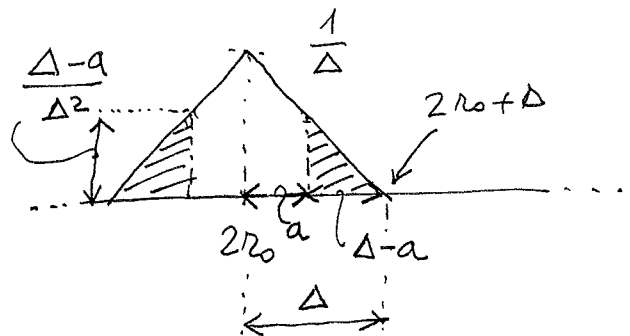


La probabilità di scarto del circuito si può scrivere

$$p_s = P\{(R_{TOT} < 2r_0 - a) \cup (R_{TOT} > 2r_0 + a)\} =$$

$$= P\{|R_{TOT} - 2r_0| > a\}$$

ed è data dalla somma delle due aree tratteggiate (uguali) in figura.



Dalla geometria elementare (similitudine fra triangoli) si ricava facilmente l'altezza del triangolo tratteggiato: $\left(\frac{\Delta - a}{\Delta^2} \right)$ e quindi la sua area: $Area = \frac{1}{2} (\Delta - a) \frac{(\Delta - a)}{\Delta^2}$.

Quindi infine:

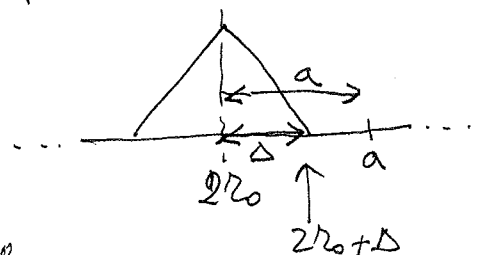
$$p_s = 2 \cdot Area = \frac{(\Delta - a)^2}{\Delta^2} \quad \text{valido naturalmente per } \Delta > a$$

perché se $\Delta < a$ (ovvero $a > \Delta$) la probabilità di scarto è nulla (perché $(R_{TOT} - 2r_0)$ è sempre minore di a) $\geq$

Il problema chiede di trovare Δ ("incertezza" che devono avere le resistenze singole) avendo fissato

il valore di a (tolleranza massima sul

valore di R_{TOT}) e volendo ottenere una data probabilità di scarto ($p_s = 4 \cdot 10^{-2} = 4\%$).



Si tratta di ricavare Δ dalla relazione trovata
 $\left(p_s = \frac{(\Delta - a)^2}{\Delta^2} \right)$ in funzione di a e p_s ossia risolvere
 l'equazione di secondo grado:

$$\Delta^2 \cdot p_s = (\Delta - a)^2 \rightarrow \Delta^2(1 - p_s) - 2a \cdot \Delta + a^2 = 0$$

da cui:

$$\Delta = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(1-p_s)a^2}}{2 \cdot (1-p_s)} = a \cdot \frac{1 \pm \sqrt{p_s}}{(1-p_s)} = \begin{matrix} - \nearrow a \cdot \frac{1}{1+\sqrt{p_s}} < a \\ + \searrow a \cdot \frac{1}{1-\sqrt{p_s}} > a \end{matrix}$$

Come detto cerchiamo un valore

di Δ maggiore di a (altrimenti $p_s = 0$) quindi l'unica
 radice accettabile è

$$\boxed{\Delta = a \cdot \frac{1}{1-\sqrt{p_s}} = a \cdot \frac{1}{1-\sqrt{0,04}} = a \cdot \frac{1}{1-0,2} = \frac{5}{4}a = 1,25 \cdot a}$$

P.es. se si volesse ottenere $2R_0 = 2000 \Omega$ con una
 tolleranza massima $a = 10 \Omega$ e probabilità di scarto $p_s = 4\%$

Si dovrebbe partire da resistenze con $R_0 = 1000 \Omega$

$$\text{e } \Delta = 1,25 \cdot a = 1,25 \cdot 10 = 12,5 \Omega \text{ ossia: } R_0 \pm 6,25 \Omega \quad \nwarrow \frac{\Delta}{2}$$

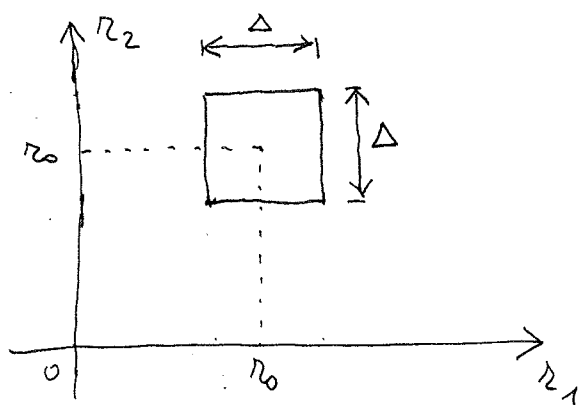
Altro metodo

Avendo a che fare con due v.a. si può risolvere il
 problema usando la densità di probabilità congiunta di
 R_1 e R_2 che, essendo indipendenti è:

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r) \cdot f_{R_2}(r) = \frac{1}{\Delta^2} \Pi\left(\frac{r_1 - R_0}{\Delta}\right) \cdot \Pi\left(\frac{r_2 - R_0}{\Delta}\right)$$

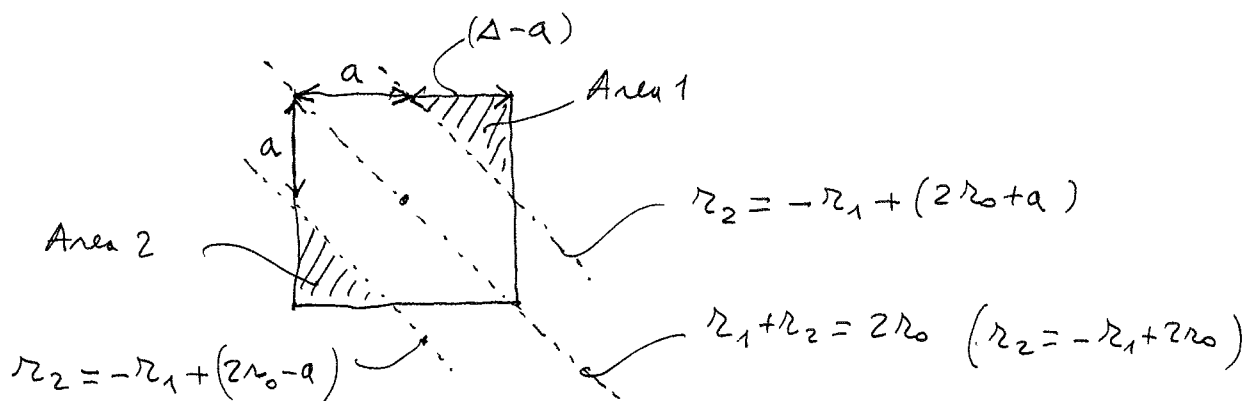
(segue)

che c è costante e di valore $\frac{1}{\Delta^2}$ nel quadrato in figura e nulla altrove



La probabilità che la somma $R_1 + R_2$ si discosti da $2r_0$ per più di a è uguale alla probabilità che la coppia di realizzazioni r_1 e r_2 di R_1 e R_2 appartenga all'unione delle due regioni:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 > 2r_0 + a \rightarrow r_2 > -r_1 + (2r_0 + a) \\ r_1 + r_2 < 2r_0 - a \rightarrow r_2 < -r_1 + (2r_0 - a) \end{cases} \leftarrow \text{rette}$$



Le due aree si trovano con la geometria elementare e

valgono:

$$\text{Area 1} = \text{Area 2} = \frac{1}{2} (\Delta - a)^2$$

e la probabilità cercata è:

$$P_S = P\{|R_{TOT} - 2r_0| > a\} = 2 \cdot \frac{1}{\Delta^2} \frac{1}{2} (\Delta - a)^2 = \frac{(\Delta - a)^2}{\Delta^2}$$

come trovato col metodo precedente.

Valore della densità congiunta costante nel quadrato.