

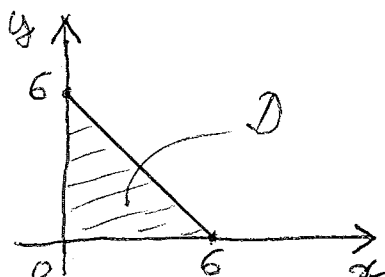
Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A89

La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ di due v.a. X e Y è costante nel dominio D in figura.

Si calcoli la probabilità dell'evento: $A = \{Y < X^2\}$

Si trovi la densità di probabilità $f_X(x)$ della v.a. X e se ne tracci un grafico.



Quesito A89 (soluzione)

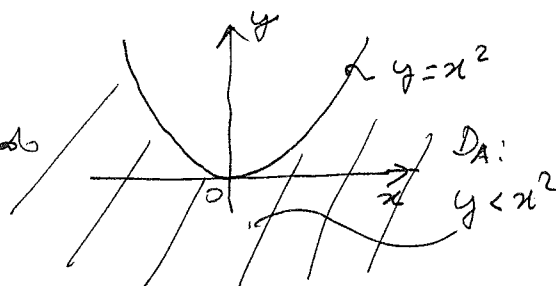
Il valore costante $f_{XY}(x, y) = -c$ della densità di probabilità nel dominio D ponendo uguale a 1 il volume sopra l'area D (normalizzazione) ossia:

$$\frac{6^2}{2} \cdot -c = 1 \longrightarrow -c = \frac{1}{18}$$

Area triangolo

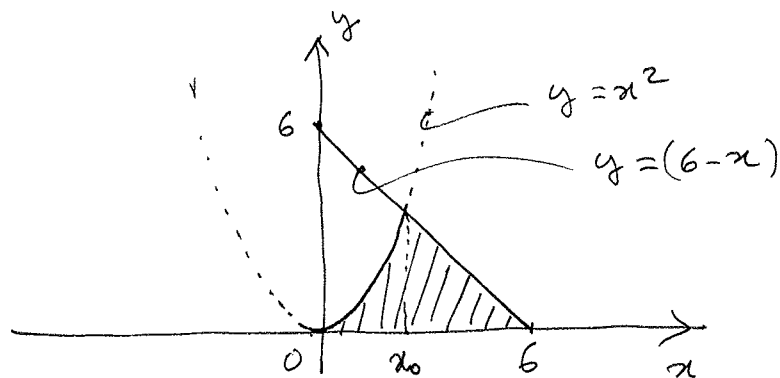
La regione del piano, D_A , corrispondente all'evento $A = \{Y < X^2\}$ è quella esterna alla parabola $y = x^2$.

La probabilità di A si trova integrando la densità congiunta su D_A ossia:



$$P\{A\} = \iint_{D_A} f_{XY}(x, y) dx dy$$

ma data la forma particolarmente semplice di $f_{XY}(x, y)$ nel caso dato la probabilità data dall'integrale doppio (volume) si può calcolare trovando l'area della regione tratteggiata nella figura nella pagina seguente e moltiplicandola per $-c = \frac{1}{18}$.



Ossia:

$$P\{A\} = -c \cdot \left[\int_0^{x_0} x^2 dx + \int_{x_0}^6 (6-x) dx \right]$$

Dove il valore di x_0 da usare si ricava come soluzione dell'equazione: $x^2 = 6-x \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

ovvero:

$$x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 6}}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -3 \end{matrix} \rightarrow \underline{x_0 = 2} \text{ poiché deve essere } 0 < x_0 < 6$$

Quindi la probabilità cercata è:

$$\boxed{P\{X < X^2\} = P\{A\} = \frac{1}{18} \left[\int_0^2 x^2 dx + \int_2^6 (6-x) dx \right] = \frac{1}{18} \left\{ \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[6x - \frac{x^2}{2} \right]_2^6 \right\} = \frac{1}{18} \cdot \left[\frac{8}{3} + 8 \right] = \frac{1}{18} \cdot \frac{32}{3} = \frac{16}{27} = 0,592}$$

La densità di probabilità marginale $f_x(x)$ si trova così:

$$\boxed{f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{6-x} -c \cdot dy = \frac{1}{18} [y]_0^{6-x} = \frac{1}{18} (6-x) & \text{per } 0 < x < 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

Il grafico di $f_x(x)$ è il seguente:

