

Esame di TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A9

Una variabile aleatoria Y è ottenuta da una variabile aleatoria X mediante la trasformazione $Y = g(X)$.

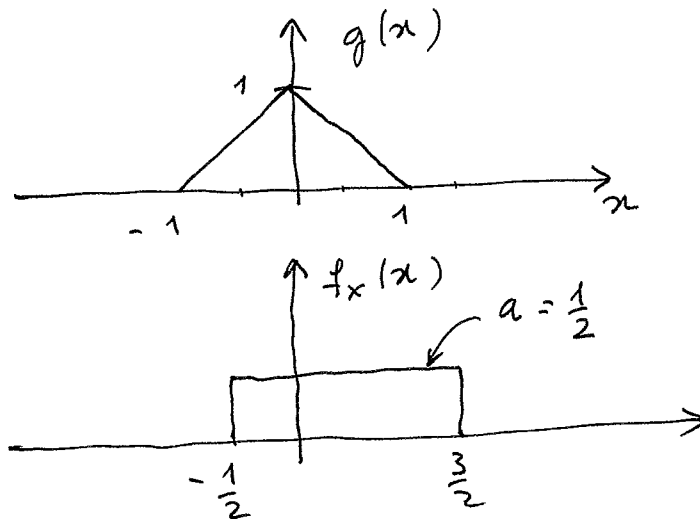
Siano:

$$f_X(x) = \begin{cases} a & \text{per } -1/2 < x < 3/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \Lambda(x) = (1 - |x|) \cdot \Pi(x/2).$$

- Si dica quale deve essere il valore di a .
- Si tracci un grafico di $g(x)$
- Si trovi l'espressione della densità $f_Y(y)$ e se ne tracci un grafico.

Quesito A9 (soluzione)

In figura vediamo il grafico di $y = g(x) = \Lambda(x)$ e la densità $f_X(x)$ di X che, per la proprietà di normalizzazione vale $\boxed{a = \frac{1}{2}}$ per $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.



Applicando il teorema fondamentale:

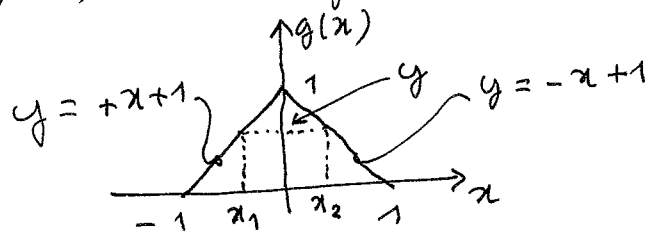
- 1) Fuori dal codominio: per $y < 0$ (ma $y \neq 0$) e $y > 1$ si ha $f_Y(y) = 0$



2) Zone piatte: ce n'è una, per $y=0$, dove avremo una delta di area pari a $P\{Y=0\} = P\{X > 1\} = P\{1 < X < \frac{3}{2}\} = \frac{1}{4}$

3) Per ogni $0 < y < 1$: esistono due soluzioni dell'equazione $y = g(x)$ e valgono:

$$\begin{cases} x_1 = y - 1 \\ x_2 = 1 - y \end{cases}$$



La derivata vale:

$$g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } 0 < x < 1 \\ +1 & \text{per } -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(x_1) = +1 \\ g'(x_2) = -1 \end{cases}$$

e quindi, per $0 < y < 1$

$$f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_x(x_2)}{|g'(x_2)|} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}}{|1|} + \frac{\frac{1}{2}}{|-1|} = 1, & \frac{1}{2} < y < 1 \\ \frac{0}{|1|} + \frac{\frac{1}{2}}{|-1|} = \frac{1}{2}, & 0 < y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

E quindi:

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \delta(y) & \text{per } y=0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } 0 < y < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{per } \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

