

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A90

Un'azienda ha due impianti, A e B, che producono motori dello stesso tipo. L'impianto A produce il 3% di motori difettosi e l'impianto B l'1%. Si sceglie a caso un lotto di 100 motori tutti prodotti dallo stesso impianto e si trova che 3 di essi sono difettosi.

Qual è la probabilità che il lotto provenga dall'impianto A? E quale dall'impianto B?

Quesito A90 (Soluzione)

Si definiscano i seguenti eventi:

$A = \{ \text{Il lotto scelto proviene dall'impianto A} \}$

$B = \{ \text{" " " " " " B} \}$

$C = \{ \text{Tre motori del lotto scelto sono difettosi} \}$.

Si cercano le probabilità $P(A|C)$ e $P(B|C) = 1 - P(A|C)$

Si ha (Teorema di Bayes):

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)}$$

In mancanza di altre indicazioni si può assumere che il lotto scelto possa provenire da A o da B con uguale probabilità

ovvero: $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

Siano inoltre $p_A = 0,03$ e $p_B = 0,01$ le probabilità (date) che un motore esca difettoso dai due impianti, rispettivamente -

Si può quindi scrivere (prove ripetute):

$$P(C|A) = \binom{100}{3} p_A^3 \cdot (1-p_A)^{97} = 161700 \cdot 2,7 \cdot 10^{-5} \cdot 0,052 \approx 0,227$$

e anche (probabilità totali):

$$P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B) = 0,227 \cdot \frac{1}{2} + 0,061 \cdot \frac{1}{2} \approx 0,144$$

dove si è fatto uso del seguente risultato:

$$P(C|B) = \binom{100}{3} p_B^3 \cdot (1-p_B)^{97} = 161700 \cdot 10^{-6} \cdot 0,377 \approx 0,061$$

Si hanno infine le due probabilità cercate:

$$P(A|C) = \frac{0,227 \cdot \frac{1}{2}}{0,144} \approx 0,788 \quad ; \quad P(B|C) = 1 - P(A|C) \approx 0,212$$