

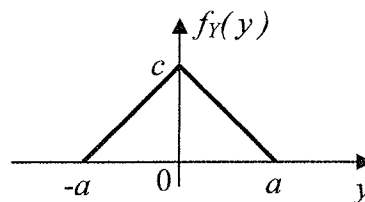
Esame di TEORIA DEI SEGNALI

Quesito A91 21/07/14

La v.a. X è discreta e può assumere i valori $+1$ e -1 ciascuno con probabilità $1/2$. La v.a. Y , è indipendente da X , è continua e ha densità di probabilità come in figura (con $a > 0$).

Si consideri la v.a. :

$$Z = X + Y$$



a) Si calcoli la probabilità che il segno di Z sia opposto al segno di X , assumendo $a = 3$.

b) Si dica per quali valori di a (se esistono) la probabilità cercata è nulla.

{Per il calcolo richiesto non si trovino densità di probabilità congiunte né la densità di probabilità di Z . Si ricordi che la v.a. è discreta e si usi il teorema delle probabilità totali.}

Quesito A91 (Soluzione)

a) Si cerca la probabilità $P\{(X+Y) \text{ e } Y \text{ discordi}\}$.

Sapendo che X è discreta, applicando il teorema delle probabilità totali si può scrivere:

$$P\{(X+Y) \text{ e } Y \text{ discordi}\} = P\{(X+Y) \text{ e } Y \text{ discordi} | X = +1\} \cdot P\{X = +1\} + \\ + P\{(X+Y) \text{ e } Y \text{ discordi} | X = -1\} \cdot P\{X = -1\} =$$

$$= P\{1+Y < 0 | X = +1\} \cdot \frac{1}{2} + P\{-1+Y > 0 | X = -1\} \cdot \frac{1}{2}$$

Essendo X e Y indipendenti si ha:

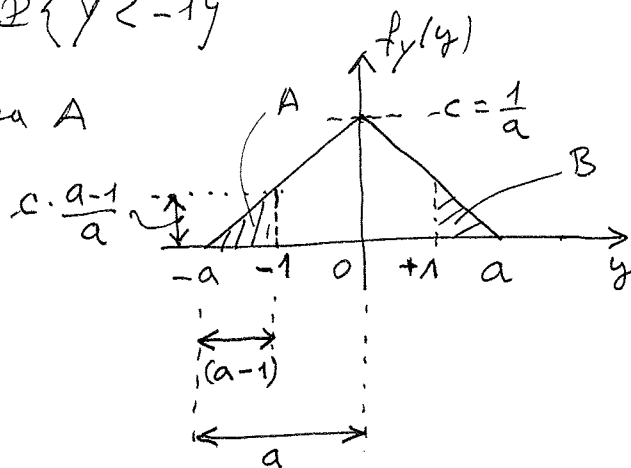
$$P\{1+Y < 0 | X = +1\} = P\{1+Y < 0\} = P\{Y < -1\}$$

Tale probabilità è uguale all'area A

tratteggiata in figura che dalla geometria elementare risulta essere:

$$A = \frac{1}{2}(a-1) \cdot c \frac{(a-1)}{a} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a-1}{a} \right)^2 \quad \text{per } a > 1$$



mentre risulta $A=0$ per $a \leq 1$ - Nel calcolo si è posto $c = \frac{1}{a}$
come necessario per la normalizzazione -

Analogamente e^- :

$$P\{-1+y > 0 | X=+1\} = P\{Y > 1\}$$

che e^- è uguale all'area B in figura, a sua volta uguale all'area A già trovata - Quindi in definitiva

$$\boxed{P\{(X+Y) \text{ e } X \text{ discordi}\} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{a-1}{a}\right)^2}_{\text{Area A}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{P\{X=+1\}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{a-1}{a}\right)^2}_{\text{Area B}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{P\{X=-1\}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a-1}{a}\right)^2}$$

Nel caso proposto ($a=3$) la probabilità trovata vale:

$$\boxed{p = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \approx 0,22}$$

b) La probabilità cercata è nulla per i valori di a per cui le aree A e B sono nulle ossia $\boxed{\text{per } 0 < a < 1}$

