

# Esame di TEORIA DEI SEGNALE

## Quesito A94

Un sacchetto contiene 50 palline bianche e 20 palline rosse. Una persona che non conosce la distribuzione dei due colori nel sacchetto vuole stimare quale sia il colore prevalente nel sacchetto e per fare ciò estrae 5 palline a caso dichiarando che il colore prevalente nel sacchetto è quello che risulta prevalente fra le palline estratte.

Quanto vale la probabilità che la dichiarazione sia errata?

## Quesito A94 (Soluzione)

Poiché nel sacchetto il colore prevalente è il bianco la dichiarazione è errata se il numero di palline rosse è prevalente fra quelle estratte ossia se si estraggono 3 o 4 o 5 palline rosse. Essendo tali eventi mutuamente esclusivi si può scrivere:

$$P\{\text{Dichiarazione errata}\} = P\{3 \text{ o } 4 \text{ o } 5 \text{ rosse fra le } 5 \text{ estratte}\} =$$

$$= \sum_{i=3}^5 P\{i \text{ rosse fra le } 5 \text{ estratte}\} =$$

$$= \sum_{i=3}^5 \frac{\binom{20}{i} \binom{50}{5-i}}{\binom{70}{5}} =$$

n. gruppi di i rosse  
n. gruppi di 5-i bianche  
n. gruppi di 5 palline (totale)

$$\approx 0,137$$

Alternativamente si poteva ragionare sulle bianche:

$$P\{\text{Dichiarazione errata}\} = P\{0 \text{ o } 1 \text{ o } 2 \text{ bianche fra le } 5 \text{ estr.}\} =$$

$$= \sum_{i=0}^2 \frac{\binom{50}{i} \binom{20}{5-i}}{\binom{70}{5}} \approx 0,137$$

Attenzione - Il problema non è di prove ripetute perché le probabilità cambiano da un'estrazione all'altra (non si ripristina) tuttavia, dati i numeri

(50 branche, 20 rosse) le probabilità cambiano di poco e il calcolo eseguito come se si trattasse di prove ripetute può considerarsi un' approssimazione, infatti:

$$P\{\text{dichiarazione errata}\} = P\{3, \text{ o } 4, \text{ o } 5 \text{ rosse su 5 estratte con ripristino}\} =$$

$$= \sum_{i=3}^5 \binom{5}{i} p_R^i (1-p_R)^{5-i} =$$

↓  
prove ripetute

$$= \binom{5}{3} p_R^3 (1-p_R)^2 + \binom{5}{4} p_R^4 (1-p_R)^1 + \binom{5}{5} p_R^5 (1-p_R)^0 =$$

$$= 10 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 \left(\frac{5}{7}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^4 \left(\frac{5}{7}\right) + 1 \cdot \left(\frac{5}{7}\right) \cdot 1 \simeq 0,143$$

Il valore trovato è assai prossimo a quello corretto -  $p_R$  è la probabilità di estrarre una pallina rossa in una estrazione col sacchetto completo, che è naturalmente:

$$p_R = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$$