

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito A99

Due amici A e B si sfidano al tiro al bersaglio sparando tre colpi ciascuno.

La probabilità che i due centrino il bersaglio sparando un colpo siano rispettivamente p_A e p_B .

Si scriva l'espressione della probabilità che A vinca la gara, ossia la probabilità P_A dell'evento $\{n_A > n_B\}$ essendo n_A e n_B il numero dei centri ottenuti rispettivamente dai due amici.

Successivamente e facoltativamente si sostituiscano nell'espressione trovata i valori

$p_A = 0,6$ e $p_B = 0,5$ e si calcoli con tali valori la probabilità cercata.

Quesito A99 (Soluzione)

Per comodità indichiamo con $\{i, k\}$ l'evento congiunto:

$\{n_A = i, n_B = k\}$ ossia: A fa i centri e B fa k centri.

Gli eventi di questo tipo sono tutti mutuamente esclusivi quindi la probabilità cercata si può scrivere così (3° assioma):

$$P\{n_A > n_B\} = P\{3, 2\} + P\{3, 1\} + P\{3, 0\} + P\{2, 1\} + P\{2, 0\} + P\{1, 0\}.$$

Essendo i tiri distinti si può assumere indipendenza fra gli eventi del tipo $\{n_A = i\}$ e $\{n_B = k\}$, quindi ancora:

$$P\{n_A > n_B\} = P\{n_A = 3\} \cdot P\{n_B = 2\} + P\{n_A = 3\} \cdot P\{n_B = 1\} + \dots \text{ecc.}$$

Ogni probabilità del tipo $P\{n = i\}$ si può scrivere come:

$P\{n = i\} = \binom{3}{i} p^i (1-p)^{3-i}$ essendo p la prob. di colpire il bersaglio con un colpo e $q = 1-p$ il suo complemento.

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} P\{n_A > n_B\} &= P\{n_A = 3\} [P\{n_B = 2\} + P\{n_B = 1\} + P\{n_B = 0\}] + \\ &\quad + P\{n_A = 2\} [P\{n_B = 1\} + P\{n_B = 0\}] + \\ &\quad + P\{n_A = 1\} [P\{n_B = 0\}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \binom{3}{3} p_A^3 q_A^0 \left[\binom{3}{2} p_B^2 q_B + \binom{3}{1} p_B q_B^2 + \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3 \right] + \\ &\quad + \binom{3}{2} p_A^2 q_A \left[\binom{3}{1} p_B q_B^2 + \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3 \right] + \\ &\quad + \binom{3}{1} p_A q_A^2 \left[\binom{3}{0} p_B^0 q_B^3 \right] = \end{aligned}$$

$$= p_A^3 [3p_B^2 q_B + 3p_B q_B^2 + q_B^3] + 3p_A q_A^2 [3p_B^2 q_B + q_B^3] + 3p_A q_A^2 p_B^3$$

La probabilità trovata può essere espressa in vari modi fra cui il seguente

$$P\{y_A > y_B\} = \sum_{i=1}^3 \left[\binom{3}{i} p_A^i q_A^{3-i} \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \binom{3}{k} p_B^k q_B^{3-k} \right]$$

Con i valori proposti: $p_A = 0,6$ e $p_B = 0,5$ si ha:

$$\begin{aligned} P\{y_A > y_B\} &= (0,6)^3 [3(0,5)^2(0,5) + 3(0,5)(0,5)^2 + (0,5)^3] + \\ &\quad + 3(0,6)^2(0,4) \cdot [\quad \quad \quad] + \\ &\quad + 3(0,6)(0,4)^2 \cdot [\quad \quad \quad] = \end{aligned}$$

$$= 0,216 \cdot [0,875] + 0,432 \cdot [0,5] + 0,288 \cdot [0,125] = \underline{\underline{0,441}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $7 \cdot (0,5)^3$ $4 \cdot (0,5)^3$ $(0,5)^3$

La probabilità che A vinca la gara è quindi del 44,1% - Il complemento a 1 (55,9%) è la probabilità che vinca B più la probabilità di pareggio -