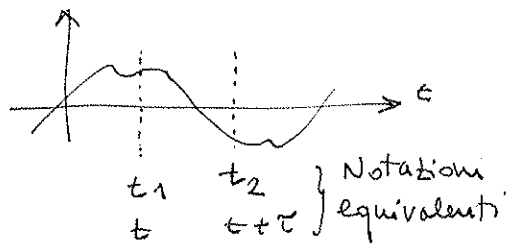


Filtraggio di processi stazionari in senso lato: calcolo della funzione di autocorrelazione del processo di uscita -

$$X(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow Y(t)$$



La funzione di autocorrelazione di $X(t)$ è:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau), \text{ dove } \tau = t_2 - t_1$$

Cerchiamo la funzione di autocorrelazione del processo di uscita $Y(t)$, che in genere dipende da t_1 e t_2 (oppure: da τ):

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= R_Y(t, t+\tau) = E\{Y(t)Y(t+\tau)\} = \\ &= E\left\{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)X(t-\alpha)d\alpha\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)X(t+\tau-\beta)d\beta\right]\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)h(\beta) E\{X(t-\alpha)X(t+\tau-\beta)\} d\alpha d\beta = \\ &\quad R_X(t+\tau-\beta-(t-\alpha)) = R_X(\tau-\beta+\alpha) \\ &= \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha) \left[\int_{\beta=-\infty}^{+\infty} h(\beta) R_X(\tau+\alpha-\beta) d\beta \right] d\alpha = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha) g(\tau+\alpha) d\alpha \quad (1) \end{aligned}$$

dove si è posto $g(\tau) \triangleq R_X(\tau) * h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) R_X(\tau-\beta) d\beta$

Ponendo $\gamma \triangleq -\alpha$ in (1) risulta:

$$R_Y(t, t+\tau) = \int_{\alpha=-\infty}^{+\infty} h(\alpha) g(\tau+\alpha) d\alpha = - \int_{\gamma=+\infty}^{-\infty} h(-\gamma) g(\tau-\gamma) d\gamma = g(\tau) * l(\tau)$$

avendo posto $l(\gamma) \triangleq h(-\gamma)$.

E quindi:

$$\boxed{R_Y(t, t+\tau) = g(\tau) * l(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)} = R_Y(\tau)$$

Si osserva che anche la funzione di autocorrelazione dell'uscita dipende solo da τ , quindi si scrive $R_Y(t, t+\tau) = R_Y(\tau)$.