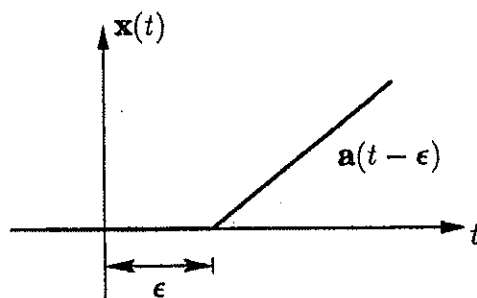


Esercizio 8.4.3

Un processo $\mathbf{x}(t)$ ha la generica realizzazione come in figura, dove a ed ϵ sono due variabili casuali tra loro indipendenti e uniformemente distribuite come segue: a tra -1 e 1 , ϵ tra 0 e T . Dire se il processo $\mathbf{x}(t)$ è stazionario in senso lato e determinarne la densità di probabilità del 1° ordine dato $\{a = 1\}$.



Il processo non è stazionario in senso lato. Infatti, per $t_1 < 0$ e $t_2 < 0$ si ha:

$$E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} = 0$$

perché il processo vale sempre zero. D'altra parte, per $t_1 > T$ e $t_2 > T$

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} &= E\{a(t_1 - \epsilon)a(t_2 - \epsilon)\} = E\{a^2[\epsilon^2 - (t_1 + t_2)\epsilon + t_1t_2]\} \\ &= E\{a^2\} [E\{\epsilon^2\} - (t_1 + t_2)E\{\epsilon\} + t_1t_2] \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{T^2}{3} - (t_1 + t_2)\frac{T}{2} + t_1t_2 \right] \end{aligned}$$

Quindi la funzione di autocorrelazione dipende dai valori di t_1 e t_2 e il processo non è stazionario in senso lato.

Posto $a = 1$ cominciamo col determinare la funzione di distribuzione di $\mathbf{x}(t)$. Se $x < 0$ allora $F_{\mathbf{x}}(x; t) = P\{\mathbf{x}(t) \leq x\} = 0$ e quindi anche la densità di probabilità $f_{\mathbf{x}}(x; t) = 0$. Per $x \geq 0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{x}}(x; t) &= P\{\mathbf{x}(t) \leq x\} \\ &= P\{\mathbf{x}(t) \leq x \mid \epsilon > t\}P\{\epsilon > t\} + P\{\mathbf{x}(t) \leq x \mid \epsilon \leq t\}P\{\epsilon \leq t\} \end{aligned}$$

Osserviamo che se $\epsilon > t$, allora $\mathbf{x}(t) = 0$ e dunque

$$P\{\mathbf{x}(t) \leq x \mid \epsilon > t\} = 1 \quad \text{per } x \geq 0$$

mentre se $\epsilon \leq t$, allora $\mathbf{x}(t) = t - \epsilon$ e

$$\begin{aligned} P\{\mathbf{x}(t) \leq x \mid \epsilon \leq t\} &= P\{0 \leq t - \epsilon \leq x \mid \epsilon \leq t\} \\ &= \frac{P\{t - x \leq \epsilon \leq t\}}{F_{\epsilon}(t)} = 1 - \frac{F_{\epsilon}(t - x)}{F_{\epsilon}(t)} \end{aligned}$$

Inoltre

$$P\{\epsilon \leq t\} = F_{\epsilon}(t)$$

e

$$P\{\epsilon > t\} = 1 - F_{\epsilon}(t)$$

La funzione di distribuzione di $\mathbf{x}(t)$ è allora

$$F_{\mathbf{x}}(x; t) = \begin{cases} 1 - F_{\epsilon}(t - x) & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

da cui si ricava la densità di probabilità

$$f_{\mathbf{x}}(x; t) = \frac{dF_{\mathbf{x}}(x; t)}{dx} = \begin{cases} [1 - F_{\epsilon}(t)]\delta(x) + f_{\epsilon}(t - x) & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 8.4.4

Siano $\mathbf{x}_1$ ed $\mathbf{x}_2$ due variabili casuali indipendenti e distribuite uniformemente tra 0 e 1. Determinare la media e l'autocorrelazione del processo $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1 \sin(\mathbf{x}_2 t)$.

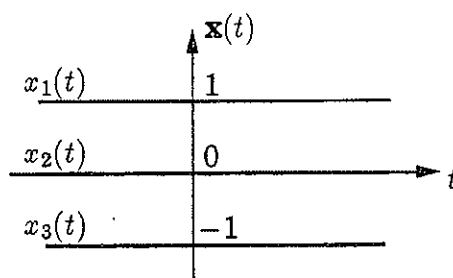
Media ed autocorrelazione del processo sono di calcolo immediato:

$$E\{\mathbf{y}(t)\} = E\{\mathbf{x}_1\} E\{\sin(\mathbf{x}_2 t)\} = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 \sin(xt) dx = \frac{1 - \cos t}{2t}$$

$$\begin{aligned}
E\{y(t_1)y(t_2)\} &= E\{\mathbf{x}_1 \sin(\mathbf{x}_2 t_1) \mathbf{x}_1 \sin(\mathbf{x}_2 t_2)\} \\
&= E\{\mathbf{x}_1^2\} E\{\sin(\mathbf{x}_2 t_1) \sin(\mathbf{x}_2 t_2)\} \\
&= \frac{1}{3} E\left\{\frac{1}{2} [\cos[\mathbf{x}_2(t_1 - t_2)] - \cos[\mathbf{x}_2(t_1 + t_2)]]\right\} \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 [\cos[x(t_1 - t_2)] - \cos[x(t_1 + t_2)]] dx \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{\sin(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{\sin(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2} \right]
\end{aligned}$$

Esercizio 8.4.5

Un processo ha funzioni campione, supposte equiprobabili, come in figura:



Determinare valor medio e funzione di autocorrelazione del processo, stabilire se è stazionario in senso lato e dire se è ergodico in media e in correlazione.

Data la semplicità del processo, il calcolo del valor medio e della funzione di autocorrelazione è immediato

$$\begin{aligned}
\eta_{\mathbf{x}}(t) &= E\{\mathbf{x}(t)\} \\
&= x_1(t)P\{\mathbf{x}(t) = x_1(t)\} + x_2(t)P\{\mathbf{x}(t) = x_2(t)\} + x_3(t)P\{\mathbf{x}(t) = x_3(t)\} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} = 0 \\
R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} \\
&= x_1(t_1)x_1(t_2)P\{\mathbf{x}(t) = x_1(t)\} + x_2(t_1)x_2(t_2)P\{\mathbf{x}(t) = x_2(t)\} \\
&\quad + x_3(t_1)x_3(t_2)P\{\mathbf{x}(t) = x_3(t)\} \\
&= (1)^2 \cdot \frac{1}{3} + (0)^2 \cdot \frac{1}{3} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Poiché valor medio ed autocorrelazione sono costanti, il processo è stazionario in senso lato.

Per stabilire l'ergodicità di $\mathbf{x}(t)$ calcoliamo il valor medio e la funzione di autocorrelazione temporali delle $x_i(t)$

$$\eta_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{per } x_1(t) \\ 0 & \text{per } x_2(t) \\ -1 & \text{per } x_3(t) \end{cases}$$

$$R_i(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) x_i(t + \tau) d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } x_1(t) \\ 0 & \text{per } x_2(t) \\ 1 & \text{per } x_3(t) \end{cases}$$

Dal momento che $\eta_1 \neq \eta_3 \neq \eta_{\mathbf{x}}(t)$, $R_i(\tau) \neq R_{\mathbf{x}}(t, t + \tau) \quad \forall i$ e $P\{\mathbf{x}(t) = x_i(t)\} \neq 0 \quad \forall i$, il processo non è ergodico nè in media nè in autocorrelazione.

Esercizio 8.4.6

Dato il processo $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t$ con $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ variabili casuali gaussiane indipendenti a media nulla e varianza σ^2 , determinarne la funzione di autocorrelazione $R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2)$ e la densità di probabilità del 2° ordine $f_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)$.

La funzione di autocorrelazione è di calcolo immediato

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} \\ &= E\{(\mathbf{a} \cos \omega t_1 + \mathbf{b} \sin \omega t_1)(\mathbf{a} \cos \omega t_2 + \mathbf{b} \sin \omega t_2)\} \\ &= E\{\mathbf{a}^2\} \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + E\{\mathbf{b}^2\} \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 \\ &\quad + E\{\mathbf{a}\} E\{\mathbf{b}\} (\sin \omega t_1 \cos \omega t_2 + \cos \omega t_1 \sin \omega t_2) \\ &= \sigma^2 (\cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + \sin \omega t_1 \sin \omega t_2) = \sigma^2 \cos[\omega(t_2 - t_1)] \end{aligned}$$

La densità di probabilità del 2° ordine del processo è la densità di probabilità congiunta delle variabili casuali

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{a} \cos \omega t_1 + \mathbf{b} \sin \omega t_1$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{a} \cos \omega t_2 + \mathbf{b} \sin \omega t_2$$

Le variabili casuali $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ sono congiuntamente gaussiane perché combinazioni lineari di variabili casuali congiuntamente gaussiane (nel caso specifico $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono indipendenti), la loro media è nulla, hanno varianza

$$\sigma_w^2 = E\{(\mathbf{a} \cos \omega t_1 + \mathbf{b} \sin \omega t_1)^2\} = E\{\mathbf{a}^2\} \cos^2 \omega t_1 + E\{\mathbf{b}^2\} \sin^2 \omega t_1 = \sigma^2$$

$$\sigma_z^2 = E\{(\mathbf{a} \cos \omega t_2 + \mathbf{b} \sin \omega t_2)^2\} = E\{\mathbf{a}^2\} \cos^2 \omega t_2 + E\{\mathbf{b}^2\} \sin^2 \omega t_2 = \sigma^2$$

e la loro correlazione è

$$E\{\mathbf{wz}\} = R_x(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos[\omega(t_2 - t_1)]$$

L'espressione generale della densità di probabilità di due variabili casuali $\mathbf{w}, \mathbf{z}$ congiuntamente gaussiane è

$$f_{\mathbf{wz}}(w, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_w\sigma_z\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(w-\eta_w)^2}{2\sigma_w^2} + \frac{(z-\eta_z)^2}{2\sigma_z^2} + \rho\frac{(w-\eta_w)(z-\eta_z)}{\sigma_w\sigma_z}\right]\right\}$$

dove ρ è il coefficiente di correlazione

$$\rho = \frac{1}{\sigma_w\sigma_z} E\{(\mathbf{w} - \eta_w)(\mathbf{z} - \eta_z)\}$$

Nel caso in esame

$$\eta_w = \eta_z = 0, \quad \sigma_w = \sigma_z = \sigma, \quad \rho = \cos[\omega(t_2 - t_1)]$$

e quindi

$$f_{\mathbf{wz}}(w, z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{1-\rho^2} \frac{w^2 + z^2 + 2\rho wz}{2\sigma^2}\right]$$

Si conclude che la densità di probabilità cercata è

$$f_{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2|\sin[\omega(t_2-t_1)]|} \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 + 2\cos[\omega(t_2-t_1)]x_1x_2}{2\sigma^2\sin^2[\omega(t_2-t_1)]}\right]$$

Esercizio 8.4.7

Determinare la densità di probabilità del 2° ordine e la funzione di autocorrelazione del processo $\mathbf{x}(t) = at + b$, dove b è una costante mentre a è una variabile casuale gaussiana a media nulla e varianza σ^2 .

Pur essendo simile al precedente, questo esercizio va risolto in modo differente perché il coefficiente di correlazione ρ tra le variabili casuali $\mathbf{w} = at_1 + b$ e $\mathbf{z} = at_2 + b$ è unitario. Infatti $\mathbf{z}$ può essere vista come una funzione di $\mathbf{w}$

$$\mathbf{z} = at_2 + b = \frac{t_2}{t_1}(at_1 + b) - b\frac{t_2}{t_1} + b = \frac{t_2}{t_1}\mathbf{w} + b\left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right)$$

Convienne determinare la funzione di distribuzione del processo

$$\begin{aligned}
 F_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= P\{\mathbf{x}(t_1) \leq x_1, \mathbf{x}(t_2) \leq x_2\} \\
 &= P\{a t_1 + b \leq x_1, a t_2 + b \leq x_2\} \\
 &= P\{a \leq \frac{x_1 - b}{t_1}, a \leq \frac{x_2 - b}{t_2}\} \\
 &= \begin{cases} F_a\left(\frac{x_1 - b}{t_1}\right) & \text{per } \frac{x_1 - b}{t_1} \leq \frac{x_2 - b}{t_2} \\ F_a\left(\frac{x_2 - b}{t_2}\right) & \text{altrimenti} \end{cases}
 \end{aligned}$$

e quindi derivarla prima rispetto a x_1 e poi rispetto a x_2 per ottenere la densità di probabilità. Derivando rispetto a x_1 si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1} &= \begin{cases} \frac{1}{t_1} f_a\left(\frac{x_1 - b}{t_1}\right) & \text{per } \frac{x_1 - b}{t_1} \leq \frac{x_2 - b}{t_2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\
 &= \frac{1}{t_1} f_a\left(\frac{x_1 - b}{t_1}\right) u\left(\frac{x_2 - b}{t_2} - \frac{x_1 - b}{t_1}\right)
 \end{aligned}$$

avendo indicato con $u(x)$ la funzione gradino unitario

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tenendo conto del fatto che

$$\frac{du(x)}{dx} = \delta(x)$$

derivando rispetto a x_2 abbiamo

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 F_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 &= \frac{1}{t_1 t_2} f_a\left(\frac{x_1 - b}{t_1}\right) \delta\left(\frac{x_2 - b}{t_2} - \frac{x_1 - b}{t_1}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma t_1 t_2} \exp\left[-\frac{(x_1 - b)^2}{2\sigma^2 t_1^2}\right] \delta\left(\frac{x_2 - b}{t_2} - \frac{x_1 - b}{t_1}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma t_1} \exp\left[-\frac{(x_1 - b)^2}{2\sigma^2 t_1^2}\right] \delta\left(x_2 - b - \frac{t_2}{t_1}(x_1 - b)\right)
 \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la proprietà della funzione δ

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \delta(t)$$

Avendo a disposizione la densità di probabilità del 2° ordine, la funzione di autocorrelazione potrebbe calcolarsi come

$$R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

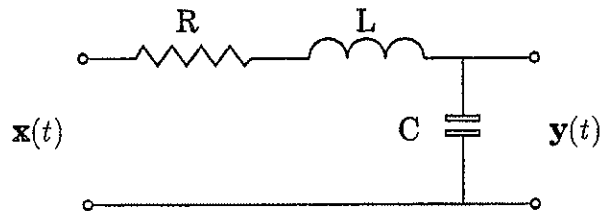
ma in questo caso il calcolo risulta più rapido se fatto nel seguente modo

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2) &= E\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} \\ &= E\{(at_1 + b)(at_2 + b)\} \\ &= E\{a^2 t_1 t_2 + ab(t_1 + t_2) + b^2\} \\ &= \sigma^2 t_1 t_2 + b^2 \end{aligned}$$

Si invita il lettore diligente a verificare il risultato eseguendo il calcolo dell'integrale di cui sopra.

Esercizio 8.4.8

La tensione di ingresso al circuito di figura è un processo $\mathbf{x}(t)$ con valor medio $E\{\mathbf{x}(t)\} = 2$ e funzione di autocorrelazione $R_{\mathbf{x}}(\tau) = 4 + e^{-2|\tau|}$. Determinare il valor medio e la densità spettrale di potenza del processo in uscita $\mathbf{y}(t)$.



Il circuito proposto è un sistema lineare e tempo invariante e sarà dunque caratterizzato da una funzione di trasferimento $H(f)$. Per determinarla si può procedere con i metodi dell'elettrotecnica, considerando il circuito equivalente ottenuto sostituendo alle induttanze ed alle capacità delle impedenze di valore $X_L(f) = j2\pi fL$ e $X_C(f) = \frac{1}{j2\pi fC}$ rispettivamente. Oppure si può usare l'equazione differenziale che regge il funzionamento del circuito. Operando per esempio in quest'ultimo modo, dette $v_i(t)$ e $v_u(t)$ le tensioni di ingresso e uscita rispettivamente, e indicando con $i(t)$ la corrente, si ha

$$v_i(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Dal momento che

$$v_u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

derivando si ottiene

$$i(t) = C \frac{dv_u(t)}{dt}$$

e sostituendo nell'equazione differenziale

$$v_i(t) = RC \frac{dv_u(t)}{dt} + LC \frac{d^2v_u(t)}{dt^2} + v_u(t)$$

Prendendo adesso la trasformata di Fourier di entrambi i membri

$$\begin{aligned} V_i(f) &= j2\pi f RC V_u(f) - 4\pi^2 f^2 LC V_u(f) + V_u(f) \\ &= [1 - 4\pi^2 f^2 LC + j2\pi f RC] V_u(f) \end{aligned}$$

otteniamo la funzione di trasferimento cercata come rapporto tra $V_u(f)$ e $V_i(f)$

$$H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{1}{1 - 4\pi^2 f^2 LC + j2\pi f RC}$$

Detta $h(t)$ la risposta impulsiva del circuito

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)]$$

per calcolare il valor medio, scriviamo il processo di uscita come

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

in modo che

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{y}(t)\} &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) E\{\mathbf{x}(\tau)\} d\tau \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Operando adesso il cambiamento di variabile $t' = t - \tau$, otteniamo

$$E\{\mathbf{y}(t)\} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t') dt' = 2H(0) = 2$$

dove si è fatto uso della definizione di trasformata di Fourier e del fatto che $H(0) = 1$.

La densità spettrale del processo di ingresso è la trasformata di Fourier della sua funzione di autocorrelazione. Cominciamo col determinare mediante calcolo diretto la trasformata di $e^{-\alpha|t|}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-\alpha|t|}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - j2\pi f)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-(\alpha-j2\pi f)t} dt + \int_0^\infty e^{-(\alpha+j2\pi f)t} dt \\
&= -\frac{e^{-(\alpha-j2\pi f)t}}{\alpha-j2\pi f} \Big|_0^\infty - \frac{e^{-(\alpha+j2\pi f)t}}{\alpha+j2\pi f} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{\alpha-j2\pi f} + \frac{1}{\alpha+j2\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}
\end{aligned}$$

Questo risultato, per $\alpha = 2$, consente di scrivere

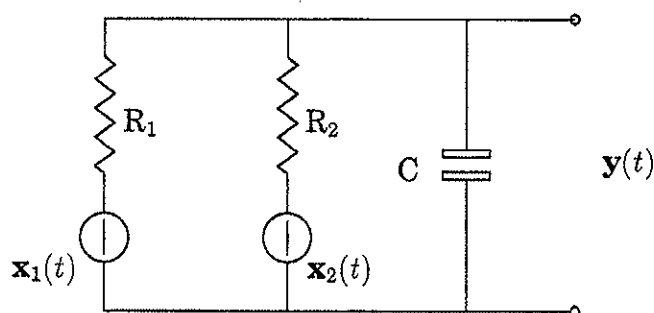
$$G_{\mathbf{x}}(f) = \mathcal{F}[R_{\mathbf{x}}(\tau)] = 4\delta(f) + \frac{1}{1 + \pi^2 f^2}$$

e quindi la densità spettrale del processo in uscita è

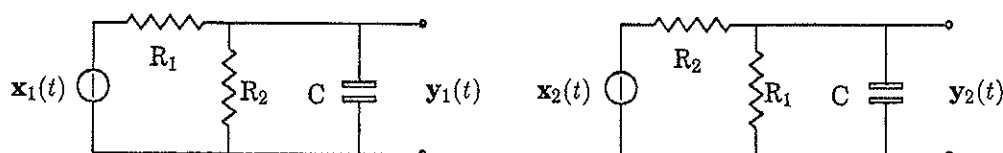
$$G_{\mathbf{y}}(f) = G_{\mathbf{x}}(f)|H(f)|^2 = 4\delta(f) + \frac{1}{1 + \pi^2 f^2} \frac{1}{(1 - 4\pi^2 f^2 LC)^2 + (2\pi f RC)^2}$$

Esercizio 8.4.9

I processi $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$, supposti stazionari ed ortogonali, rappresentano le tensioni di rumore proprie dei resistori R_1 ed R_2 . Si determini la densità spettrale di potenza di $\mathbf{y}(t)$ assumendo che quelle di $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$ siano $G_{\mathbf{x}_1}(f) = N_0/2$ e $G_{\mathbf{x}_2}(f) = \alpha N_0/2$ rispettivamente. Si calcoli inoltre la funzione densità di probabilità di $\mathbf{y}(t)$ nell'ipotesi che $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$ siano congiuntamente gaussiani.



Essendo i due processi ortogonali (cioè $E\{\mathbf{x}_1(t)\mathbf{x}_2(t+\tau)\} = 0$) può applicarsi il principio di sovrapposizione degli effetti anche per le potenze. Calcoliamo allora la densità spettrale di potenza dovuta a $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$ pensando che essi agiscano separatamente uno alla volta. Considerando quindi presente solo $\mathbf{x}_1(t)$ o solo $\mathbf{x}_2(t)$ si ottengono i due circuiti seguenti



Considerando il circuito per $\mathbf{x}_1(t)$, per il calcolo della funzione di trasferimento utilizziamo il circuito equivalente in frequenza, ottenuto sostituendo al condensatore una impedenza di valore $1/j2\pi fC$. L'impedenza equivalente al parallelo tra R_2 e C è

$$Z_p(f) = \frac{R_2 \frac{1}{j2\pi fC}}{R_2 + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{R_2}{1 + j2\pi fR_2C}$$

e quindi la funzione di trasferimento cercata è

$$H_1(f) = \frac{Z_p(f)}{R_1 + Z_p(f)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j2\pi fR_1R_2C}$$

Osservando che il circuito per $\mathbf{x}_2(t)$ è uguale a quello per $\mathbf{x}_1(t)$ scambiando tra loro R_1 e R_2 , possiamo affermare che la funzione di trasferimento relativa a $\mathbf{x}_2(t)$ è

$$H_2(f) = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + j2\pi fR_1R_2C}$$

Allora la densità spettrale di potenza dovuta solo a $\mathbf{x}_1(t)$ è

$$G_{y_1}(f) = G_{x_1}(f)|H_1(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + (2\pi f(R_1R_2C))^2}$$

mentre quella dovuta solo a $\mathbf{x}_2(t)$ è

$$G_{y_2}(f) = G_{x_2}(f)|H_2(f)|^2 = \alpha \frac{N_0}{2} \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (2\pi f(R_1R_2C))^2}$$

Per l'ortogonalità dei due processi sarà

$$G_y(f) = G_{y_1}(f) + G_{y_2}(f) = \frac{N_0}{2} \frac{\alpha R_1^2 + R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + (2\pi f(R_1R_2C))^2}$$

Dette $h_1(t)$ e $h_2(t)$ le antitrasformate di $H_1(f)$ e $H_2(f)$, rispettivamente, il processo $\mathbf{y}(t)$ può scriversi

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1(t) + \mathbf{y}_2(t)$$

con

$$\mathbf{y}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t - \tau) \mathbf{x}_1(\tau) d\tau \quad , \quad \mathbf{y}_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t - \tau) \mathbf{x}_2(\tau) d\tau$$

Essendo $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_2(t)$ ottenuti filtrando due processi congiuntamente gaussiani, sono essi stessi congiuntamente gaussiani e la loro somma $\mathbf{y}(t)$ è ancora un processo gaussiano. Per specificare la densità di probabilità di $\mathbf{y}(t)$ basta allora conoscerne

valor medio e varianza. L'assenza di componenti impulsive nello spettro di potenza di $\mathbf{y}(t)$ e la sua stessa natura, ci dicono che il suo valor medio è nullo, mentre la varianza σ^2 può essere calcolata come

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\{\mathbf{y}^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\mathbf{y}}(f) df \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{\alpha R_1^2 + R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{1 + \left(\frac{2\pi f R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}\right)^2} \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{\alpha R_1^2 + R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{R_1 + R_2}{2\pi R_1 R_2 C} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= \frac{N_0}{4} \frac{\alpha R_1^2 + R_2^2}{(R_1 + R_2) R_1 R_2 C}\end{aligned}$$

La densità di probabilità di $\mathbf{y}(t)$ è dunque

$$f_{\mathbf{y}}(y; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

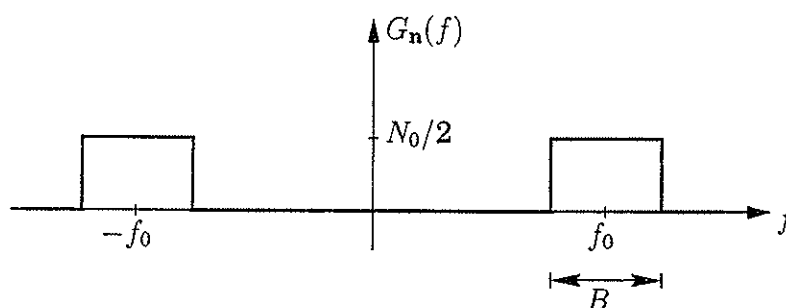
e risulta indipendente da t .

Esercizio 8.4.10

In figura è mostrata la densità spettrale di un processo $\mathbf{n}(t)$. Assumendo che $\mathbf{n}(t)$ possa scriversi nella forma:

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}_c(t) \cos 2\pi f_0 t + \mathbf{n}_s(t) \sin 2\pi f_0 t$$

dove $\mathbf{n}_c(t)$ ed $\mathbf{n}_s(t)$ sono processi stazionari in senso lato con densità spettrale $G_{\mathbf{n}_c}(f) = G_{\mathbf{n}_s}(f)$, determinare $G_{\mathbf{n}_c}(f)$ e $E\{\mathbf{n}^2(t)\}$.



La funzione di autocorrelazione di $\mathbf{n}(t)$ è

$$\begin{aligned}R_{\mathbf{n}}(\tau) &= E\{\mathbf{n}(t + \tau)\mathbf{n}(t)\} \\ &= E\left\{\left[\mathbf{n}_c(t + \tau) \cos 2\pi f_0(t + \tau) + \mathbf{n}_s(t + \tau) \sin 2\pi f_0(t + \tau)\right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [\mathbf{n}_c(t) \cos 2\pi f_0 t + \mathbf{n}_s(t) \sin 2\pi f_0 t]\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E\{\mathbf{n}_c(t+\tau)\mathbf{n}_c(t)\cos 2\pi f_0(t+\tau)\cos 2\pi f_0t \\
&\quad + \mathbf{n}_c(t+\tau)\mathbf{n}_s(t)\cos 2\pi f_0(t+\tau)\sin 2\pi f_0t \\
&\quad + \mathbf{n}_s(t+\tau)\mathbf{n}_c(t)\sin 2\pi f_0(t+\tau)\cos 2\pi f_0t \\
&\quad + \mathbf{n}_s(t+\tau)\mathbf{n}_s(t)\sin 2\pi f_0(t+\tau)\sin 2\pi f_0t\}
\end{aligned}$$

Essendo per ipotesi $G_{\mathbf{n}_c}(f) = G_{\mathbf{n}_s}(f)$, dovrà essere anche $R_{\mathbf{n}_c}(\tau) = R_{\mathbf{n}_s}(\tau)$; indicando inoltre con $R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau)$ la funzione di correlazione mutua tra $\mathbf{n}_c(t)$ e $\mathbf{n}_s(t)$ ($R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau) = E\{\mathbf{n}_c(t+\tau)\mathbf{n}_s(t)\}$) si ottiene

$$\begin{aligned}
R_{\mathbf{n}}(\tau) &= R_{\mathbf{n}_c}(\tau)\cos 2\pi f_0\tau + R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(-\tau)\sin 2\pi f_0(t+\tau)\cos 2\pi f_0t \\
&\quad + R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau)\cos 2\pi f_0(t+\tau)\sin 2\pi f_0t \\
&= R_{\mathbf{n}_c}(\tau)\cos 2\pi f_0\tau + \frac{1}{2}R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(-\tau)[\sin 2\pi f_0(2t+\tau) + \sin 2\pi f_0\tau] \\
&\quad + \frac{1}{2}R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau)[\sin 2\pi f_0(2t+\tau) - \sin 2\pi f_0\tau] \\
&= R_{\mathbf{n}_c}(\tau)\cos 2\pi f_0\tau + \frac{1}{2}[R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(-\tau) - R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau)]\sin 2\pi f_0\tau \\
&\quad + \frac{1}{2}[R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(-\tau) + R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau)]\sin 2\pi f_0(2t+\tau)
\end{aligned}$$

Dal momento che $\mathbf{n}(t)$ è un processo stazionario (altrimenti non sarebbe definibile la sua densità spettrale), l'ultimo termine della relazione di sopra deve essere nullo, cioè $R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau)$ deve essere una funzione dispari

$$R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(-\tau) = -R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau)$$

e quindi

$$R_{\mathbf{n}}(\tau) = R_{\mathbf{n}_c}(\tau)\cos 2\pi f_0\tau - R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau)\sin 2\pi f_0\tau$$

La densità spettrale è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione e dunque può scriversi come

$$\begin{aligned}
G_{\mathbf{n}}(f) &= \frac{1}{2}[G_{\mathbf{n}_c}(f-f_0) + G_{\mathbf{n}_c}(f+f_0)] - \frac{1}{2j}[G_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(f-f_0) + G_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(f+f_0)] \\
&= \frac{1}{2}[G_{\mathbf{n}_c}(f+f_0) + jG_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(f+f_0)] + \frac{1}{2}[G_{\mathbf{n}_c}(f-f_0) + jG_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(f-f_0)]
\end{aligned}$$

dove si è indicato con $G_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(f)$ la trasformata di Fourier di $R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau)$, che prende il nome di densità spettrale di potenza mutua. La densità spettrale di potenza deve essere una funzione reale e positiva. La presenza dell'unità immaginaria nell'espressione di sopra potrebbe far sorgere dei dubbi, ma ricordando che $R_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(\tau)$

è una funzione reale e dispari ne discende che la sua trasformata di Fourier è una funzione immaginaria pura e dispari. Quindi $jG_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(f)$ è una funzione reale e dispari.

I due termini tra parentesi quadre rappresentano il lobo sinistro e destro, rispettivamente, di $G_{\mathbf{n}}(f)$. Ciascun lobo ha simmetria pari attorno a $-f_0$ e f_0 . Ora $G_{\mathbf{n}_c}(f)$ ha simmetria pari perchè è una densità spettrale di potenza mentre, come visto, $jG_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(f)$ ha simmetria dispari. Allora, perché l'espressione di sopra possa rappresentare la densità spettrale di potenza di $\mathbf{n}(t)$, occorre che

$$G_{\mathbf{n}_c\mathbf{n}_s}(f) = 0$$

e quindi

$$G_{\mathbf{n}}(f) = \frac{1}{2}G_{\mathbf{n}_c}(f + f_0) + \frac{1}{2}G_{\mathbf{n}_c}(f - f_0)$$

per cui si può concludere che $G_{\mathbf{n}_c}(f)$ è uguale al doppio di uno dei due lobi di $G_{\mathbf{n}}(f)$ riportato attorno all'origine

$$G_{\mathbf{n}_c}(f) = \begin{cases} N_0 & \text{per } |f| \leq B/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$E\{\mathbf{n}^2(t)\}$ rappresenta la potenza di $\mathbf{n}(t)$ e può calcolarsi come

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{\mathbf{n}}(f) df = N_0 B$$

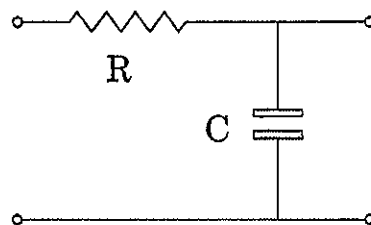
che risulta essere anche la potenza di $\mathbf{n}_c(t)$ e $\mathbf{n}_s(t)$.

Esercizio 8.4.11

Un processo stocastico $\mathbf{x}(t)$ con funzione di autocorrelazione $R_{\mathbf{x}}(\tau) = \delta(\tau)$ è applicato ad un filtro passa basso di tipo RC con banda a 3 dB pari a B . Determinare il valor medio e la funzione di autocorrelazione del processo di uscita $\mathbf{y}(t)$.

In figura è rappresentato un filtro passa basso di tipo RC. La funzione di trasferimento di tale filtro può calcolarsi con il metodo del circuito equivalente in frequenza, ottenendo

$$H(f) = \frac{1}{R + \frac{1}{j2\pi fC}} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$



La banda a 3 dB è definita come quel valore di f per il quale il modulo della funzione di trasferimento si riduce di $1/\sqrt{2}$ volte il suo valore per $f = 0$. Essendo il modulo di $H(f)$ pari a

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}$$

la banda a 3 dB risulta essere

$$B = \frac{1}{2\pi RC}$$

e quindi $H(f)$ può essere scritta come

$$H(f) = \frac{1}{1 + jf/B}$$

Dal momento che

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{\mathbf{x}}(\tau) = 0$$

il valor medio di $\mathbf{x}(t)$ è nullo e tale sarà anche quello del processo di uscita $\mathbf{y}(t)$. La densità spettrale di potenza di $\mathbf{x}(t)$ è

$$G_{\mathbf{x}}(f) = \mathcal{F}[R_{\mathbf{x}}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 1$$

quindi quella di $\mathbf{y}(t)$ è

$$G_{\mathbf{y}}(f) = G_{\mathbf{x}}(f)|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/B)^2} = \pi B \frac{2 \cdot 2\pi B}{4\pi^2 B^2 + 4\pi^2 f^2}$$

La funzione di autocorrelazione di $\mathbf{y}(t)$ è l'antitrasformata di Fourier di $G_{\mathbf{y}}(f)$. Ricordando dall'esercizio 8.4.8 che

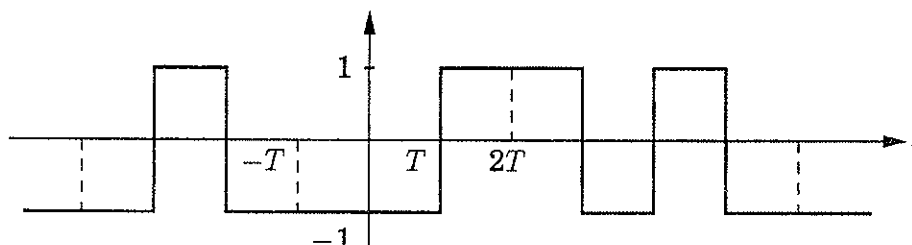
$$e^{-\alpha|\tau|} \iff \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

la funzione di autocorrelazione di $\mathbf{y}(t)$ risulta essere

$$R_{\mathbf{y}}(\tau) = \pi B e^{-2\pi B|\tau|}$$

Esercizio 8.4.12

In figura è mostrata una funzione campione del processo binario $\mathbf{x}(t)$ che ogni T secondi può assumere i valori ± 1 con uguale probabilità. Si dica se $\mathbf{x}(t)$ è stazionario in senso lato.



Per $kT \leq t < (k+1)T$ il processo $\mathbf{x}(t)$ può essere considerato una variabile casuale $\mathbf{a}_k$ che assume i valori ± 1 con uguale probabilità. Il valore assunto dal processo nell'intervallo $kT \leq t < (k+1)T$ non dipende dal valore assunto in un altro intervallo $nT \leq t < (n+1)T$, $n \neq k$, e quindi $\mathbf{a}_k$ ed $\mathbf{a}_n$ sono indipendenti. Si conclude che il processo non è stazionario in senso lato perché, fissati due istanti t_1 e t_2 tali che $|t_1 - t_2| < T$, si ha

$$\mathbf{E}\{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)\} = \begin{cases} \mathbf{E}\{\mathbf{a}_k^2\} = 1 & \text{se } kT \leq t_1, t_2 < (k+1)T \\ \mathbf{E}\{\mathbf{a}_k\mathbf{a}_n\} = \mathbf{E}\{\mathbf{a}_k\}\mathbf{E}\{\mathbf{a}_n\} = 0 & \text{se } kT \leq t_1 < (k+1)T \\ & \text{e } nT \leq t_2 < (n+1)T \\ & (n = k \pm 1) \end{cases}$$

e quindi la funzione di autocorrelazione non dipende solo dalla differenza $t_1 - t_2$.

Esercizio 8.4.13

Un processo $\mathbf{y}(t)$ è ottenuto da un altro processo $\mathbf{x}(t)$ mediante la trasformazione:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta),$$

dove θ è una variabile casuale uniformemente distribuita tra 0 e 2π ed indipendente da $\mathbf{x}(t)$. Supponendo che $\mathbf{x}(t)$ sia stazionario in senso lato ed abbia funzione di autocorrelazione $R_{\mathbf{x}}(\tau)$ e densità spettrale $G_{\mathbf{x}}(f)$, calcolare la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di $\mathbf{y}(t)$.

Per l'indipendenza di $\mathbf{x}(t)$ e θ

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{y}}(\tau) &= \mathbf{E}\{\mathbf{y}(t+\tau)\mathbf{y}(t)\} \\ &= \mathbf{E}\{\mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}(t)\} \mathbf{E}\{\cos(2\pi f_0(t+\tau) + \theta) \cos(2\pi f_0 t + \theta)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} R_{\mathbf{x}}(\tau) E \{ \cos(2\pi f_0(2t + \tau) + 2\theta) + \cos 2\pi f_0 \tau \} \\
&= \frac{1}{2} R_{\mathbf{x}}(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau
\end{aligned}$$

poiché

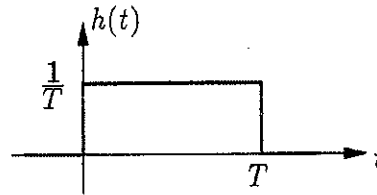
$$E \{ \cos(2\pi f_0(2t + \tau) + 2\theta) \} = 0$$

Trasformando $R_{\mathbf{y}}(\tau)$ si ottiene la densità spettrale di $\mathbf{y}(t)$

$$G_{\mathbf{y}}(f) = \mathcal{F}[R_{\mathbf{y}}(\tau)] = \frac{1}{4} [G_{\mathbf{x}}(f - f_0) + G_{\mathbf{x}}(f + f_0)]$$

Esercizio 8.4.14

Un processo gaussiano, stazionario, a media nulla e densità spettrale di potenza $G_{\mathbf{x}}(f)$ è applicato ad un filtro con risposta impulsiva $h(t)$ mostrata in figura. Il processo di uscita è campionato all'istante T , ottenendo la variabile casuale $\mathbf{y}$. Dire cosa rappresenta tale variabile casuale e se ne determini il valor medio e la varianza.



Detto $\mathbf{x}(t)$ il processo in ingresso, il processo in uscita $\mathbf{y}(t)$ è dato dalla convoluzione tra $\mathbf{x}(t)$ e $h(t)$

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

e quindi

$$\mathbf{y} \triangleq \mathbf{y}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(\tau) d\tau$$

rappresenta il valor medio medio temporale di $\mathbf{x}(t)$ nell'intervallo $0 \leq t \leq T$. Il valor medio e la varianza di $\mathbf{y}$ sono

$$\eta_{\mathbf{y}} = E \{ \mathbf{y} \} = \frac{1}{T} \int_0^T E \{ \mathbf{x}(\tau) \} d\tau = 0$$

$$\sigma_{\mathbf{y}}^2 = E \{ (\mathbf{y} - \eta_{\mathbf{y}})^2 \} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\mathbf{x}}(f) |H(f)|^2 df$$

con

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \text{sinc}(fT)$$