

Processi incorrelati, ortogonali, indipendenti

Si definisce *funzione di correlazione incrociata* (o cross correlazione o correlazione mutua) fra due processi $X(t)$ e $Y(t)$ la seguente funzione degli istanti t_1 e t_2 :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\}$$

e analogamente: *funzione di covarianza incrociata* (o cross covarianza o covarianza mutua) la funzione:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \eta_X(t_1)][Y(t_2) - \eta_Y(t_2)]\} = R_{XY}(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_Y(t_2) .$$

E' evidente che le funzioni di autocorrelazione e di autocovarianza di un processo sono casi particolari delle precedenti in cui $X(t) = Y(t)$.

Due processi si dicono *congiuntamente stazionari in senso lato* se, essendo singolarmente stazionari in senso lato, vale anche la seguente (dove $\tau = t_2 - t_1$):

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\} = E\{X(t)Y(t+\tau)\} = R_{XY}(t_2 - t_1) = R_{XY}(\tau)$$

da cui anche (essendo i valori medi costanti):

$$C_{XY}(t_1, t_2) = C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \eta_X \eta_Y .$$

La funzione di correlazione incrociata gode delle seguenti proprietà:

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad (\text{essendo: } E\{X(t)Y(t+\tau)\} = E\{Y(t+\tau)X(t)\} = E\{Y(t)X(t-\tau)\})$$

e

$$|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0) .$$

Due processi si dicono *incorrelati* se:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad \text{per ogni coppia di istanti } (t_1, t_2).$$

Se sono anche congiuntamente stazionari in senso lato vale la seguente: $R_{XY}(\tau) = E\{X(t)Y(t+\tau)\} = \eta_X \eta_Y$.

Due processi si dicono *ortogonali* se, per ogni coppia di istanti (t_1, t_2) , si ha:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad (\text{se congiuntamente stazionari in senso lato si ha: } R_{XY}(\tau) = 0).$$

Se uno dei due processi ha media nulla l'incorrelazione implica l'ortogonalità e viceversa.

Due processi si dicono *indipendenti* se i vettori aleatori:

$$[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)] \quad \text{e} \quad [Y(t'_1), Y(t'_2), \dots, Y(t'_m)]$$

sono indipendenti per qualunque insieme di istanti $t_1, t_2, \dots, t_n, t'_1, t'_2, \dots, t'_m$.

Se ciò accade la densità di probabilità congiunta di tutte le variabili è uguale al prodotto delle densità di probabilità congiunte dei due vettori.

Se due processi sono indipendenti sono anche incorrelati: non è necessariamente vero il contrario.