

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B13

Un processo stocastico $X(t)$ stazionario in senso lato ha valor medio e funzione di autocorrelazione come segue:

$$\eta_X(t) = 2 \quad ; \quad R_X(\tau) = 3 \cdot 2^{-|\tau|/2} + 4$$

essendo $\tau = (t_1 - t_2)$ e t_1 e t_2 istanti generici.

Si trovi il valor medio, il valore quadratico medio e la varianza della variabile aleatoria:

$$Y = X(t_1) + 2 \cdot X(t_2)$$

assumendo $t_1 = 2$ e $t_2 = 6$.

Quesito B13 (Soluzione)

Valor medio

Essendo $Y = X(t_1) + 2 \cdot X(t_2)$, per la linearità del valor medio si ha:

$$\boxed{E\{Y\} = E\{X(t_1)\} + 2 \cdot E\{X(t_2)\} = \eta_X(t_1) + 2 \cdot \eta_X(t_2) = 2 + 2 \cdot 2 = 6}$$

Valore quadratico medio

Si ricordi che in un processo stazionario in senso lato risultano essere costanti, oltre al valor medio, anche il valore quadratico medio e la varianza. Nel caso in esame si ha:

$$\begin{aligned} E\{Y^2\} &= E\{[X(t_1) + 2 \cdot X(t_2)]^2\} = E\{X^2(t_1) + 4 \cdot X(t_1) \cdot X(t_2) + 4 \cdot X^2(t_2)\} = \\ &= E\{X^2(t_1)\} + 4 \cdot E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} + 4 \cdot E\{X^2(t_2)\} = \\ &= R_X(0) + 4 \cdot R_X(\tau) + 4 \cdot R_X(0) = 5 \cdot R_X(0) + 4 \cdot R_X(\tau) \end{aligned}$$

Assumendo: $\tau = t_1 - t_2 = 2 - 6 = -4$ si ha:

$$R_X(0) = 3 \cdot 2^0 + 4 = 7 \quad ; \quad R_X(\tau) = R_X(-4) = 3 \cdot 2^{\frac{-|-4|}{2}} + 4 = 3 \cdot 2^{-2} + 4 = \frac{3}{4} + 4 = \frac{19}{4}$$

$\uparrow$
 $= -2$

e quindi:

$$\boxed{E\{Y^2\} = 5 \cdot 7 + 4 \cdot \frac{19}{4} = 35 + 19 = 54}$$

$$\text{Varianza: } \boxed{\sigma_Y^2 = E\{Y^2\} - E^2\{Y\} = 54 - 6^2 = 54 - 36 = 18}$$