

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B19

Un processo $X(t)$ gaussiano bianco a media nulla con densità spettrale di potenza $S_x(f) = N_0/2$ è posto all'ingresso di un filtro integratore a finestra mobile avente relazione fra ingresso e uscita:

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$$

Si scriva l'espressione analitica della densità di probabilità del 1° ordine del processo di uscita (in funzione di N_0 e T) giustificando i passaggi che portano al risultato.

Quesito B19 (Soluzione)

L'integratore a finestra mobile è un sistema LTI per cui anche il processo di uscita è gaussiano e stazionario in senso lato (e quindi in senso stretto) - Quindi la densità di probabilità del 1° ordine del processo di uscita è gaussiana e non dipende dal tempo - Per scriverla occorre conoscere μ_y e σ_y^2 -

μ_y è nullo perché:

$$\mu_y = \mu_x \cdot H(0) = 0 \quad \text{essendo } \mu_x = 0 \text{ e } H(0) \text{ finito (vedi dopo)}$$

σ_y^2 si trova quindi da:

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \cdot |H(f)|^2 df = R_y(0)$$

Funz. di
autocorrelazione
di uscita

dove:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2} \cdot |H(f)|^2\right\} = \\ &= \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\{T^2 \text{sinc}^2(fT)\} = \frac{N_0}{2} \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) \end{aligned}$$

Integratore a
finestra
mobile

da cui:

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \frac{N_0 T}{2}$$

$$\text{e quindi infine: } \boxed{f_y(y) = \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0 T}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{N_0 T}{2}}} e^{-\frac{y^2}{N_0 T}}}$$