

Esame di
TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B37 15/6/2012

Un processo parametrico $X(t)$ è così definito:

$$X(t) = Z e^{-Wt} u(t)$$

Dove Z è una v.a. uniformemente distribuita fra -1 e 1 e W è una v.a. indipendente da Z uniformemente distribuita fra 0 e 1.

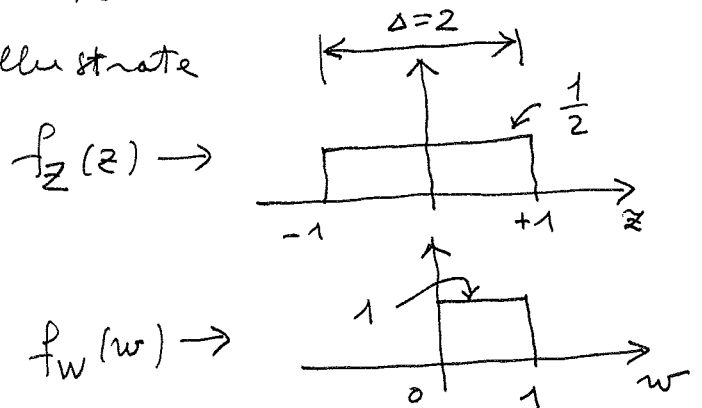
Si traccino alcune possibili realizzazioni del processo.

Si calcolino il valor medio e il valore quadratico medio del processo (potenza statistica istantanea) e si dica se essi sono compatibili con la stazionarietà in senso lato.

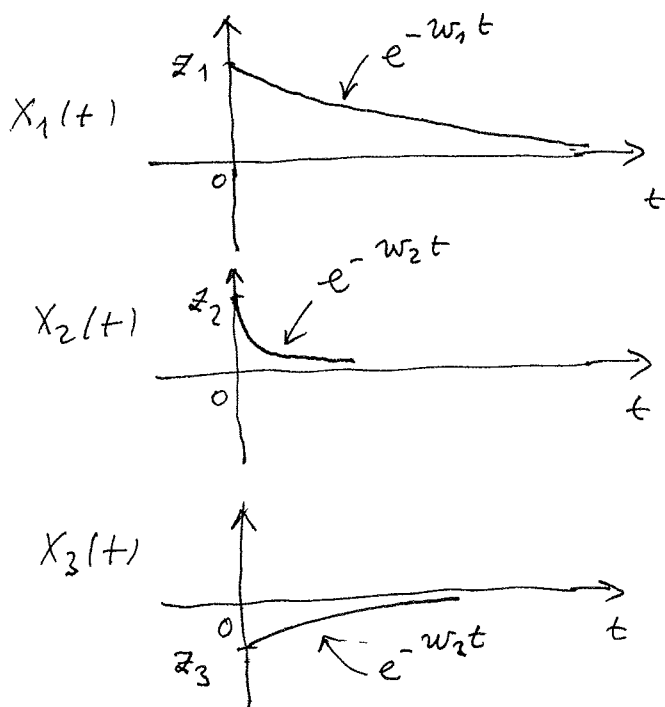
{Si tenga presente che se due v.a. sono indipendenti ogni v.a. funzione dell'una è indipendente da ogni v.a. funzione dell'altra}

Quesito B37 (Soluzione)

Le densità di probabilità $f_Z(z)$ e $f_W(w)$ delle v.a. (indipendenti) Z e W sono illustrate in figura -



Alcune realizzazioni del processo possono essere le seguenti:



Il valor medio del processo si può scrivere (data l'indipendenza):

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E\{X(t)\} = E\{Z \cdot e^{-Wt} u(t)\} = \\ &= E\{Z\} \cdot E\{e^{-Wt} u(t)\} = 0 \end{aligned}$$

Tale valore risulta nullo perché, data la simmetria di $f_Z(z)$, è: $E\{Z\} = 0$.

Il valore quadratico medio ^(v.q.m.) del processo è:

$$E\{X^2(t)\} = E\{Z^2 \cdot e^{-2\omega t} u(t)\} = E\{Z^2\} \cdot E\{e^{-2\omega t}\} \cdot u(t) \quad (1)$$

Il v.q.m. della v.a. Z : $E\{Z^2\}$ è uguale alla sua varianza σ_Z^2 (perché $E\{Z\} = 0$) che a sua volta

vale $\sigma_Z^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ essendo Z una v.a. uniforme su un intervallo di ampiezza Δ - Quindi nel nostro caso ($\Delta=2$):

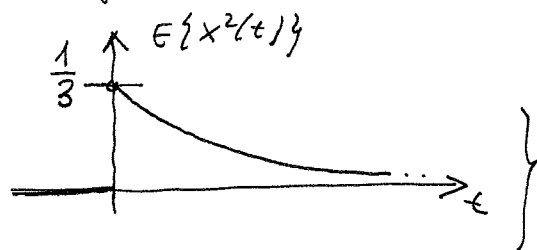
$$E\{Z^2\} = \sigma_Z^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$$

Il valore di $E\{e^{-2\omega t}\}$ in (1) si può ricavare dal teorema dell'aspettazione:

$$E\{e^{-2\omega t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-2\omega t}) \cdot f_w(\omega) d\omega = \int_0^1 e^{-2\omega t} \cdot 1 d\omega =$$

$$= \left[\frac{e^{-2\omega t}}{-2t} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-2t}}{t}$$

{ Grafico di $E\{X^2(t)\}$ (non richiesto).
Dallo studio della funzione trovata:



E quindi finalmente (vedi (1)):

$$E\{X^2(t)\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{-2t}}{t} \right) \cdot u(t)$$

La stazionarietà in senso lato implica costante nel tempo del valor medio, in questo caso verificata, ma anche costante del valore quadratico medio ($= R_X(0)$) che in questo caso non è verificata, quindi il processo non è stazionario in senso lato (né quindi in alcun altro senso).