

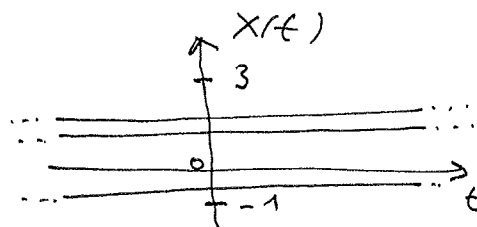
Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B40 2/7/2012

Dato il processo stocastico $X(t) = 1 + A$, dove A è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[-1; 3]$, si trovi la densità spettrale di potenza del processo e la sua potenza media.

Quesito B40 (Soluzione)

Le realizzazioni del processo sono rette parallele orizzontali

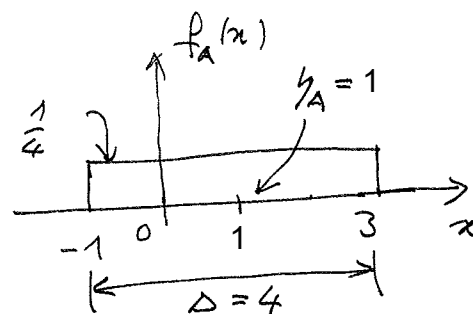


La densità di probabilità

della v.a. A è in figura.

Dalle proprietà delle v.a. uniformi

$$\text{si ha: } E\{A\} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 = \mu_A$$



$$\sigma_A^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4^2}{12} = \frac{4}{3}$$

Ed anche (essendo $\sigma_A^2 = E\{A^2\} - \mu_A^2$):

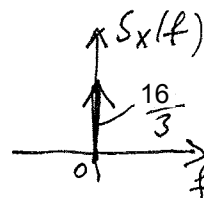
$$E\{A^2\} = \frac{\Delta^2}{12} + \mu_A^2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

Applicando tutto ciò al processo $X(t)$ si ha che la densità spettrale cercata è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$ che va prima trovata e verificato che non dipende esplicitamente dagli istanti t_1 e t_2 ma dalla differenza $\tau = t_2 - t_1$ - si ha:

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = E\{(1+A)(1+A)\} = E\{1 + 2A + A^2\} =$$

$$= 1 + 2 \cdot E\{A\} + E\{A^2\} = 1 + 2 \cdot 1 + \frac{7}{3} = \frac{16}{3} \leftarrow \text{Costante}$$

$$\text{Quindi è: } R_X(\tau) = \frac{16}{3} \quad \text{e} \quad \boxed{S_X(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{16}{3}\right\} = \frac{16}{3} \delta(f)}$$



La potenza media del processo è $E\{X^2(t)\} = R_X(0) = \frac{16}{3}$.