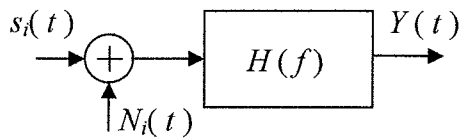


Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Esercizio n. 6 (B46)

Un sistema LTI ha risposta in frequenza $H(f)$ come nell'Esercizio n. 5 (B45).

All'ingresso di tale sistema si trova la somma:

$$X(t) = s_i(t) + N_i(t) \quad \text{che dà in uscita:} \quad Y(t) = s_u(t) + N_u(t)$$


Dove $s_i(t) = V \cos(2\pi f_0 t)$ è un segnale determinato e $N_i(t)$ è un processo bianco a media nulla con densità spettrale di potenza

$S_{N_i}(f) = \gamma$. Trattando $s_i(t)$ e $N_i(t)$ come filtrati separatamente si esegua quanto segue.

a) Si scriva l'espressione del segnale $s_u(t)$ ottenuto in uscita dal filtraggio del segnale $s_i(t)$ e se ne scriva la potenza (normalizzata) P_{S_u} .

b) Si trovi la potenza P_{N_u} (valore quadratico medio) del processo $N_u(t)$ ottenuto in uscita dal filtraggio del processo $N_i(t)$.

c) Si scriva l'espressione del rapporto P_{S_u} / P_{N_u} (rapporto segnale/rumore) e se ne tracci un grafico qualitativo in funzione di B (banda del filtro). Si trovi infine il valore di B che rende massimo tale rapporto.

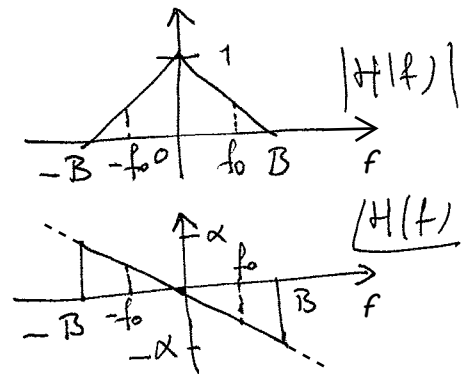
Quanto B46

a) Poiché $s_i(t) = V \cos(2\pi f_0 t)$, rimando all'uscita è immediata:

$$s_u(t) = V \cdot |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0)).$$

Essendo nel nostro caso:

$$\begin{cases} |H(f)| = \left(1 - \frac{|f|}{B}\right) \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \\ \angle H(f) = -f \frac{\alpha}{B} \end{cases}$$



Si ha:

$$s_u(t) = V \cdot \left(1 - \frac{|f_0|}{B}\right) \cos\left(2\pi f_0 t - f_0 \frac{\alpha}{B}\right) \quad \text{per } f_0 < B$$

e

$$s_u(t) = 0 \quad \text{per } f_0 > B \quad \leftarrow (f_0 \text{ fuori della banda passante del filtro}).$$

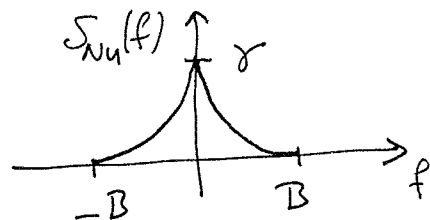
È quindi anche (ricordando l'espressione della potenza di una sinusoide):

$$\boxed{P_u = \frac{[V(1 - \frac{|f_0|}{B})]^2}{2}} \quad \text{per } f_0 < B \quad \text{e} \quad \boxed{P_u = 0 \quad \text{per } f_0 > B.}$$

b) La potenza del processo $N_u(t)$ in uscita si può ottenere integrando la sua densità spettrale di potenza che è:

$$S_{N_u}(f) = S_{N_i}(f) \cdot |H(f)|^2 = \gamma \cdot \left(1 - \frac{|f|}{B}\right)^2 \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Il cui grafico è in figura $\rightarrow$



Quindi la potenza (valore quadratico medio) è:

$$P_{Nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{N_u}(f) df = 2 \cdot \int_{-B}^0 \gamma \cdot \left(1 + \frac{f}{B}\right)^2 df = 2\gamma \left[\left(1 + \frac{f}{B}\right)^3 \cdot \frac{B}{3} \right]_{-B}^0 = \frac{2}{3} \gamma B$$

$\nearrow$ per la simmetria pari

-c) Il rapporto segnale/rumore P_{su}/P_{Nu} è quindi:

$$\frac{P_{su}}{P_{Nu}} = \frac{\frac{V^2 (1 - \frac{f_0}{B})^2}{2}}{\frac{2}{3} \gamma B} = \frac{3}{4} \frac{V^2}{\gamma} \frac{1}{B} \left(1 - \frac{f_0}{B}\right)^2 = \frac{3}{4} \frac{V^2}{\gamma} \frac{(B - f_0)^2}{B^3} \quad \text{per } B > f_0$$

Naturalmente è $\frac{P_{su}}{P_{Nu}} = 0$ per $B \leq f_0$ perché in tal caso è: $S_u(f) = 0$.

Detto $r(B)$ il rapporto, si osserva che:

$r(B) \rightarrow +\infty$ per $B \rightarrow 0$; $r(B) \rightarrow 0$ per $B \rightarrow +\infty$; $r(B) = 0$ per $B = f_0$.

La derivata è:

$$\begin{aligned} \frac{d r(B)}{d B} &= \frac{3}{4} \frac{V^2}{\gamma} \frac{d}{d B} \left[\frac{(B - f_0)^2}{B^3} \right] = \frac{3}{4} \frac{V^2}{\gamma} \frac{2 \cdot (B - f_0) \cdot B^3 - (B - f_0)^2 \cdot 3 B^2}{B^6} = \\ &= \frac{3}{4} \frac{V^2}{\gamma} (B - f_0) \cdot (-B + 3 f_0) \cdot \frac{1}{B^4} \end{aligned}$$

che si annulla per $B = f_0$ e

$B = 3 f_0$ - Un grafico qualitativo è quindi come in figura. $\rightarrow$

