

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B49

13/2/13

Si consideri il processo: $X(t) = u(t) - u(t - T)$, dove T è una variabile aleatoria con densità di probabilità:

$$f_T(\tau) = \lambda \cdot e^{-\lambda \tau} u(\tau), \quad \text{con } \lambda > 0.$$

a) Si traccino alcune realizzazioni di $X(t)$, si trovi il valor medio $\eta_X(t)$ del processo $X(t)$ e se ne tracci un grafico.

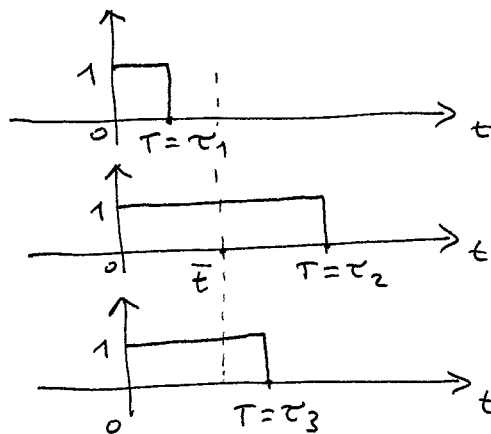
Il processo passa attraverso un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f) = e^{-j2\pi f t_0}$, con $t_0 > 0$, dando luogo ad un processo di uscita $Y(t)$.

b) Si traccino i grafici di modulo e argomento di $H(f)$ e si dica di quale sistema notevole si tratta.

c) Si trovi il valor medio $\eta_Y(t)$ del processo di uscita $Y(t)$ giustificando la risposta.

Quesito B49 (soluzione)

a) Alcune realizzazioni di $X(t)$ sono mostrate in figura -
Si osserva che la v.a. T rappresenta l'istante in cui si ha la seconda discontinuità (salto discendente) mentre la prima (salto ascendente) è sempre in $t=0$.



Si osserva che per ogni $\bar{t}$

$X(\bar{t})$ è una v.a. che può assumere solo i due valori:

$$X(\bar{t}) = 0, \text{ se } T < \bar{t}, \text{ per cui } p_0 \triangleq P\{X(\bar{t})=0\} = P\{T < \bar{t}\}$$

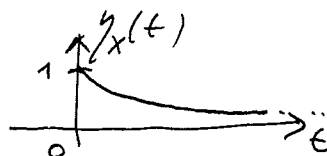
$$\text{e } X(\bar{t}) = 1, \text{ se } T > \bar{t}, \text{ per cui } p_1 \triangleq P\{X(\bar{t})=1\} = P\{T > \bar{t}\}.$$

Quindi il valor medio del processo, ossia quello della generica v.a. $X(t)$, per t qualunque è:

$$\begin{aligned} \eta_X(t) &= E\{X(t)\} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = 0 \cdot P\{X(t)=0\} + 1 \cdot P\{X(t)=1\} = \\ &= 0 + P\{T > t\} = \begin{cases} \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau = \lambda \cdot \left[\frac{e^{-\lambda \tau}}{-\lambda} \right]_t^{+\infty} = \frac{0 - e^{-\lambda t}}{-1} = e^{-\lambda t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

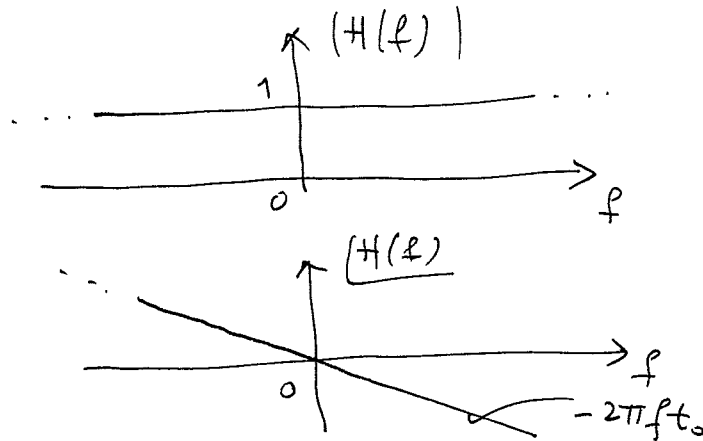
ossia:

$$\left[\eta_X(t) = e^{-\lambda t} u(t) \right] \rightarrow$$



b) Il sistema con risposta in frequenza $H(f) = e^{-j2\pi f t_0}$ con $t_0 > 0$ è un ritardatore puro ossia un sistema che ritarda semplicemente il segnale di ingresso della quantità t_0 - si ha: $|H(f)| = 1$ e $\angle H(f) = -2\pi f t_0$, da cui

i grafici:



Si osservi che la risposta all'impulso unitario è: $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j2\pi f t_0}\} = \delta(t - t_0)$.

c) È noto che il valor medio in uscita ad un sistema L.T.I. (fietro) è uguale a quello che si otterrebbe filtrando col sistema dato il valor medio $y_x(t)$ del processo di ingresso come se fosse un segnale - È infatti:

$$y_y(t) = E\{y(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{x(\tau)\} h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y_x(\tau) h(t-\tau) d\tau = y_x(t) * h(t)$$

↖ Lineare del v.m.

Quindi nel nostro caso:

$$y_x(t) \xrightarrow{\substack{\boxed{H(f)} \\ \uparrow \\ \text{Ritardatore}}} \left[y_y(t) = y_x(t - t_0) = e^{-j\lambda(t-t_0)} u(t-t_0) \right]$$