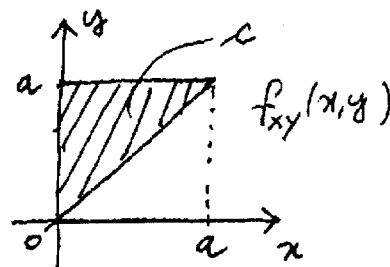


Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B52

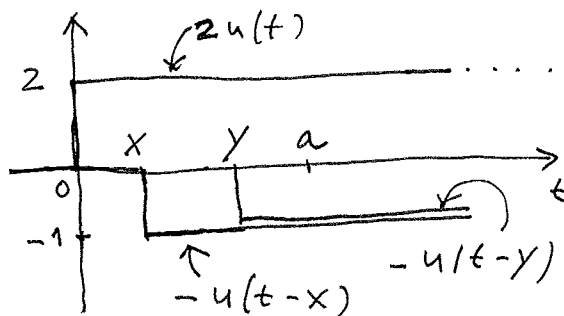
Si consideri il processo: $Z(t) = 2u(t) - u(t-X) - u(t-Y)$, dove X e Y sono v.a. con densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ avente di valore costante c nel dominio indicato in figura e nullo altrove come in figura.

- Si traccino alcune realizzazioni di $Z(t)$.
- Osservando che per ogni valore di t la v.a. estratta dal processo è discreta si scriva la densità di probabilità del primo ordine del processo $f_z(z, t)$, che avrà la forma di un somma di opportune delta di Dirac.
- Si trovi quindi il valore medio $\eta_z(t)$ del processo $Z(t)$ e se ne tracci un grafico in funzione di t .
- Si tracci un grafico di $f_z(z, t)$, in funzione di z , per $t = a/2$.



Quesito B52 (Soluzione)

- a) Si osserva che una generica realizzazione è la somma algebrica di tre gradienti come in figura → che dà sempre luogo a una funzione a gradienti con due salti di altezza 1 in corrispondenza di $t=X$ e $t=Y$ rispettivamente.

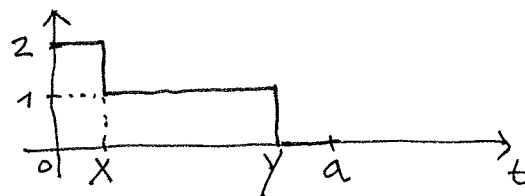


Dalla densità di probabilità congiunta di x e y ^{si osserva} che per ogni coppia di valori possibili (zona tratteggiata) si ha sempre $y > x$ ossia y è sempre a destra di x e entrambi sono sempre minori di a .

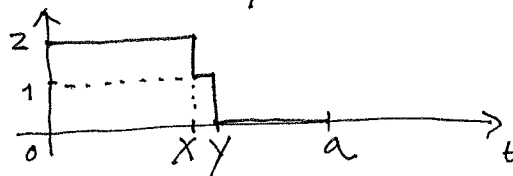
Alcune realizzazioni sono mostrate in figura. →

- b) Fissato t , per il (momento assunto compreso fra 0 e a) si osserva che il processo, o meglio la variabile aleatoria individuata all'istante t è discreta e può assumere i tre valori 0, 1, 2.

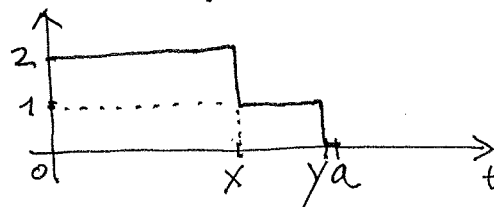
$Z_1(t)$



$Z_2(t)$



$Z_3(t)$



Più precisamente si ha (per $0 < t < a$):

$$\begin{aligned} Z(t) &= 0 && \text{se si verifica l'evento } \{Y < t\} \\ Z(t) &= 1 && \text{" " " " } \{X < t, Y > t\} \\ Z(t) &= 2 && \text{" " " " } \{X > t\} \end{aligned}$$

Indicando con $\phi_i(t) = P\{Z(t) = i\}$ con $i = 0, 1, 2$ le prob. che la v.a. $Z(t)$ assuma rispettivamente i tre valori, si osserva che per $t < 0$ e per $t > a$ si ha $\phi_0(t) = 1$ e $\phi_1(t) = \phi_2(t) = 0$ perché in tali intervalli $Z(t)$ è sempre uguale a zero, quindi la densità del primo ordine vale in tali intervalli:

$$f_Z(x, t) = \delta(x) \quad \text{per } (t < 0) \cup (t > a)$$

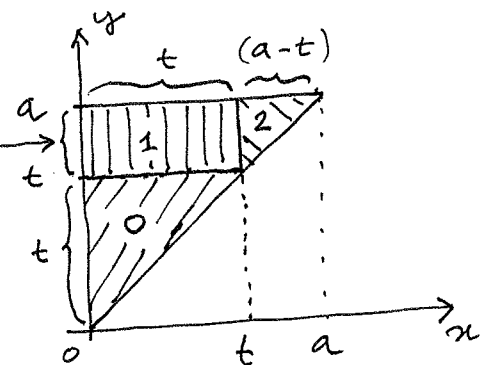
Tornando al caso $\boxed{0 < t < a}$ per quanto detto sopra la densità vale:

$$f_Z(x, t) = \phi_0(t) \cdot \delta(x) + \phi_1(t) \cdot \delta(x-1) + \phi_2(t) \cdot \delta(x-2)$$

dove:

$$\phi_0(t) = P\{Z(t) = 0\} = P\{Y < t\} = \frac{t^2}{2} \cdot c \quad (a-t) \rightarrow$$

è la massa di probabilità rappresentata dal volume del prisma avente per base la regione "0" (triangolare) e altezza c (vedi figura) -



Analogamente si ha:

$$\phi_1(t) = P\{Z(t) = 1\} = P\{X < t, Y > t\} = t(a-t) \cdot c \quad \leftarrow \text{Volume in regione "1"}$$

$$\phi_2(t) = P\{Z(t) = 2\} = P\{X > t\} = \frac{1}{2}(a-t)^2 \cdot c \quad \leftarrow \text{Volume in regione "2"}$$

c) Il valore medio del processo: $y_z(t) = E\{Z(t)\}$ vale
ovviamente zero per $t < 0$ e per $t > a$ -

Per $\boxed{0 < t < a}$ si ha (ricordando il v.m. di v.a. discrete):

$$y_z(t) = E\{Z(t)\} = 0 \cdot p_0(t) + 1 \cdot p_1(t) + 2 \cdot p_2(t) =$$

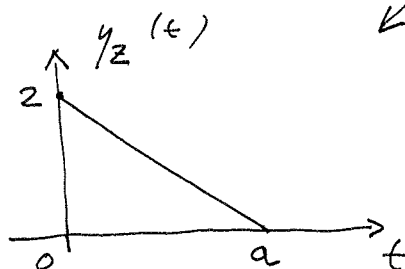
$$= t(a-t) \cdot c + 2 \cdot \frac{1}{2}(a-t)^2 \cdot c = (a-t)(t + a - t) \cdot c =$$

$$= (a-t) \cdot a \cdot c \quad (1)$$

La normalizzazione richiede che il volume del prisma
 che ha per base la regione "totale" e per altezza c sia
 unitario ossia deve essere: $\frac{a^2}{2} \cdot c = 1$ da cui: $\boxed{c = \frac{2}{a^2}}$
 che sostituito nella (1) dà:

$$\boxed{y_z(t) = E\{Z(t)\} = (a-t) \cdot a \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{2}{a}(a-t) \text{ per } 0 < t < a}$$

Da cui il grafico:



-d) Nel caso $t = \frac{a}{2}$, ricordando le espressioni trovate e
 il valore di c si ha:

$$p_0(t) = \frac{1}{2} t^2 \cdot c = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{1}{4}$$

$$p_1(t) = t(a-t) \cdot c = \frac{a}{2} \left(a - \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{1}{2}$$

$$p_2(t) = \frac{1}{2} (a-t)^2 \cdot c = \frac{1}{2} \left(a - \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{a^2} = \frac{1}{4}$$

$$\left[\begin{aligned} f_z\left(z, \frac{a}{2}\right) &= \\ &= \frac{1}{4} \delta(z) + \frac{1}{2} \delta(z-1) + \frac{1}{4} \delta(z-2) \end{aligned} \right]$$

