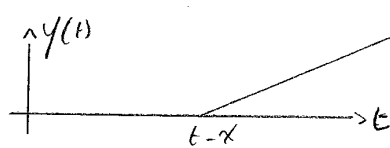
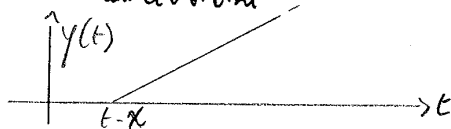


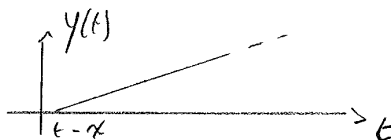
Quisito 55

$$y(t) = (t - x) u(t - x)$$

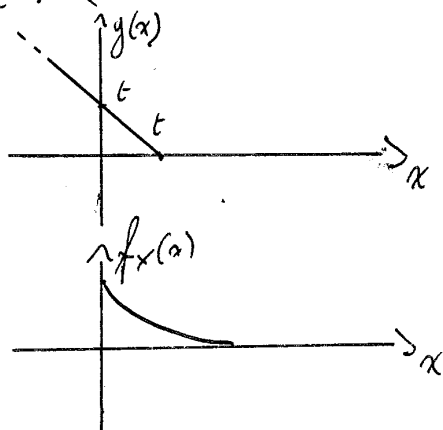
Alcune realizzazioni



Semirette con
pendenza pari
ad 1



La densità di probabilità del 1° ordine $f_Y(y, t)$ si trova mediante l'applicazione del teorema fondamentale, notando che $y = g(x)$, con $g(x) = (t - x)u(t - x)$



- Per $x < 0$ si ha $f_X(x) = 0$ e dunque $f_Y(y, t) = 0$ per $y > t$

- Per $x > t$, $g(x) = 0$. Questo dà luogo ad una delta in $y = 0$, la cui altezza è pari a

$$P\{X > t\} = \int_t^{\infty} f_X(x) dx = P_0(t)$$

$$P_0(t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}$$

- Per $0 < y < t$ si ha $f_Y(y, t) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}$

→

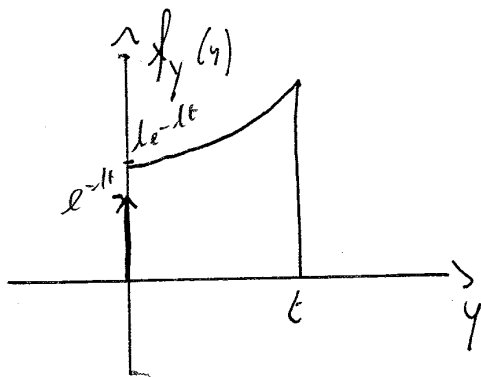
La soluzione x_1 è $x_1 = t - y$ per $0 < y < \infty$. La derivata della funzione $f(x)$ è: $f'(x) = \begin{cases} -1 & x \leq t \\ 0 & x > t \end{cases}$, perciò:

$$f_y(y, t) = \frac{f_x(t-y)}{1-1} = 1 e^{-\lambda(t-y)} u(t-y) \\ = [1 e^{-\lambda t} e^{\lambda y}] u(t-y)$$

Dunque, si ottiene:

$$f_y(y, t) = \begin{cases} 0 & y > t \\ e^{-\lambda t} \delta(y) & y = 0 \\ 1 e^{-\lambda t} e^{\lambda y} & 0 < y < t \end{cases}$$

In cui si è omissso $u(t-y)$, già considerato nell'intervallo $0 < y < t$



Verifica della proprietà di normalizzazione:

$$\int f_y(y) dy = \int e^{-\lambda t} \delta(y) dy + \int_0^t 1 e^{-\lambda t} e^{\lambda y} dy \\ = e^{-\lambda t} + 1 e^{-\lambda t} \left(\frac{e^{\lambda y}}{\lambda} \Big|_0^t \right) = e^{-\lambda t} + 1 e^{-\lambda t} \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) = 1$$