

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B57

Il sistema in figura 1 è costituito da un filtro avente risposta in frequenza $H_X(f)$ seguito da un derivatore. Tale cascata ha risposta in frequenza $H(f)$ come in figura 2.

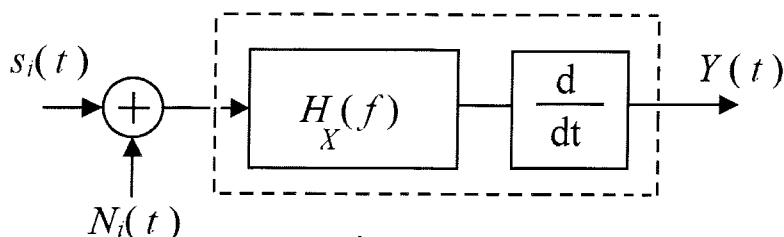


Fig. 1

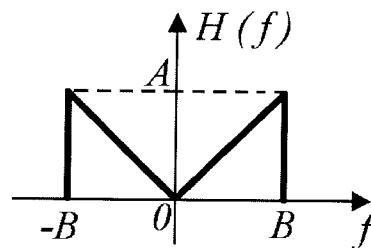


Fig. 2

a) Si trovi $H_X(f)$ (espressione analitica e grafici di modulo e argomento).

All'ingresso di tale sistema si trova la somma:

$$X(t) = s_i(t) + N_i(t) \quad \text{che dà in uscita: } Y(t) = s_u(t) + N_u(t)$$

Dove $s_i(t) = V \cos(2\pi f_0 t)$ è un segnale determinato e $N_i(t)$ è un processo bianco a media nulla con densità spettrale di potenza $S_{N_i}(f) = \gamma$. Trattando $s_i(t)$ e $N_i(t)$ come filtrati separatamente si esegua quanto segue.

b) Si scriva l'espressione del segnale $s_u(t)$ ottenuto in uscita dal filtraggio del segnale $s_i(t)$ e se ne scriva la potenza (normalizzata) P_{S_u} .

c) Si trovi la potenza P_{N_u} (valore quadratico medio) del processo $N_u(t)$ ottenuto in uscita dal filtraggio del processo $N_i(t)$.

d) Si scriva l'espressione del rapporto P_{S_u} / P_{N_u} (rapporto segnale/rumore) e se ne tracci un grafico qualitativo in funzione di B (banda del filtro). Si trovi infine il valore di B che rende massimo tale rapporto.

Quesito B57 (soluzione)

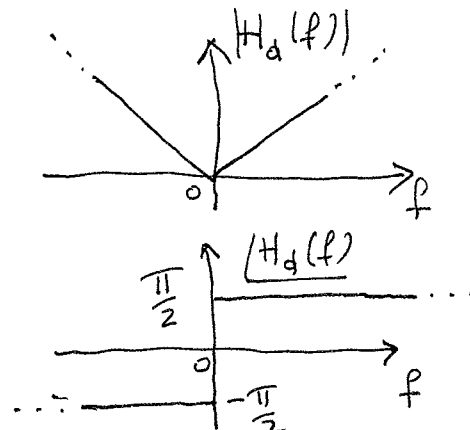
a) È noto che la risposta in frequenza del derivatore è:

$$H_d(f) = j2\pi f = 2\pi |f| e^{j\frac{\pi}{2} \text{sgn } f}$$

Per ottenere l' $H(f)$ data, la cui espressione si può ricavare dalla figura:

$$H(f) = \frac{A}{B} |f| \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right),$$

il sistema $H_X(f)$ deve limitare la banda e annullare la fase del derivatore -



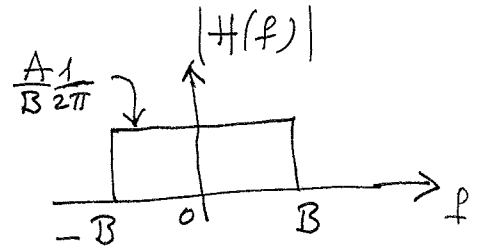
Più precisamente, essendo: $H(f) = H_x(f) \cdot H_d(f)$

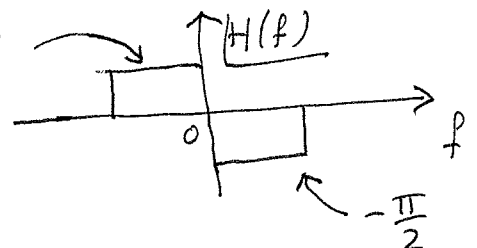
risulta immediato trovare $H_x(f)$:

$$H_x(f) = \frac{H(f)}{H_d(f)} = \frac{\frac{A}{B} |f| \cdot \pi \left(\frac{f}{2B} \right)}{j 2\pi f} =$$

$$= \frac{A}{B} \frac{1}{2\pi} \frac{j \pi \left(\frac{f}{2B} \right)}{j f} = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-j \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} f} \cdot \pi \left(\frac{f}{2B} \right)$$

Ovvero, assumendo $A > 0, B > 0$:

$$\begin{cases} |H_x(f)| = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{2\pi} \pi \left(\frac{f}{2B} \right) \rightarrow \end{cases}$$


$$\begin{cases} \angle H_x(f) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} f \rightarrow +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$


b) Se all'ingresso di $H(f)$

ritorna il segnale sinusoidale:

$$x(t) = V \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

il segnale di uscita è immediato:

$$\left[\begin{aligned} y(t) &= V \cdot |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0)) = V \cdot \\ &= \begin{cases} V \cdot \frac{A}{B} |f_0| \cos(2\pi f_0 t + 0) & \text{per } |f_0| < B \\ 0 & \text{per } |f_0| > B \end{cases} \end{aligned} \right]$$

Da cui, ricordando la potenza di una sinusoidale:

$$\left[P_{\text{su}} = \frac{1}{2} \left(V \cdot \frac{A}{B} |f_0| \right)^2 = \frac{V^2 \left(\frac{A}{B} \right)^2 |f_0|^2}{2} \right]$$

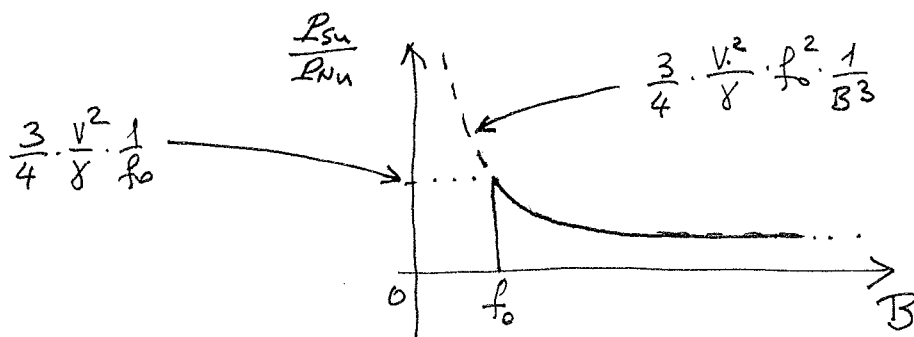
-c) la potenza di rumore in uscita si può trovare integrando la densità spettrale di potenza del processo di uscita: $S_{N_u}(f) = S_{N_i}(f) \cdot |H(f)|^2$, quindi:

$$\begin{aligned} P_{N_u} &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{N_u}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{N_i}(f) |H(f)|^2 df = \int_{-B}^B \gamma \cdot \left| \frac{A}{B} f \right|^2 df = \\ &= \gamma \cdot \left(\frac{A}{B} \right)^2 \left[\frac{1}{3} f^3 \right]_{-B}^B = \frac{\gamma}{3} \cdot \left(\frac{A}{B} \right)^2 \cdot 2B^3 = \boxed{\frac{2}{3} \gamma \cdot A^2 \cdot B} \end{aligned}$$

d) Il rapporto segnale/rumore (potenze) in uscita vale:

$$\left[\frac{P_{S_u}}{P_{N_u}} = \begin{cases} \frac{\frac{V^2}{2} \frac{A^2}{B^2} \cdot f_0^2}{\frac{2}{3} \gamma \cdot A^2 \cdot B} = \frac{3}{4} \cdot \frac{V^2}{\gamma} \cdot f_0^2 \cdot \frac{1}{B^3} & \text{per } B > f_0 \\ 0 & \text{per } 0 < B < f_0 \end{cases} \right]$$

il cui grafico in funzione di B è in figura:



Si osserva immediatamente che il valore di B per cui il rapporto è massimo è $B = f_0$ e tale massimo vale:

$$\left(\frac{P_{S_u}}{P_{N_u}} \right)_{\max} = \frac{3}{4} \cdot \frac{V^2}{\gamma} \cdot \frac{1}{f_0}$$