

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B63

Si consideri il processo parametrico:

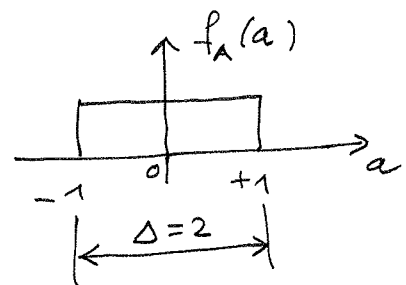
$$X(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

Dove A è una v.a. uniformemente distribuita fra -1 e 1 .

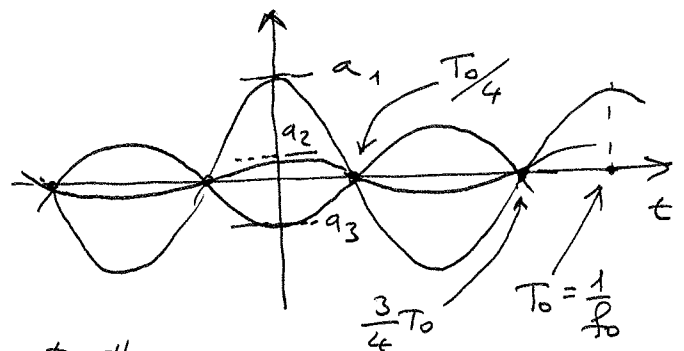
- Si traccino alcune realizzazioni del processo (sullo stesso grafico).
- Si trovi il valor medio $\eta_X(t)$ del processo.
- Si trovi la funzione di autocorrelazione $R_X(t_1, t_2)$ del processo.
- Si trovi la densità di probabilità del 1° ordine $f_X(x, t)$ del processo e se ne tracci il grafico per $t = 1/(8f_0)$.
- Si dica se il processo goda di qualche forma di stazionarietà, giustificando la risposta.

Quesito B63 (Soluzione)

La densità di probabilità della v.a. A è mostrata in figura. $\rightarrow$



- a) Le realizzazioni del processo sono sinusoidi di tutte della stessa frequenza e della stessa fase ($= 0$) ma di diversa ampiezza. Si veda la figura. $\rightarrow$



- b) Il valor medio (v.m.) del processo si può ricavare ricordando che: 1) esso è il v.m. statistico di una generica v.a. estratta dal processo fissando il tempo; 2) la quantità: $\cos 2\pi f_0 t$ non è aleatoria ma, fissato t , è una costante; 3) il v.m. di A è nullo ($E\{A\} = 0$) perché la densità di probabilità $f_A(a)$ è simmetrica rispetto al valore $a = 0$.

Quindi si ha:

$$\boxed{\eta_X(t) = E\{X(t)\} = E\{A \cdot \cos 2\pi f_0 t\} = E\{A\} \cdot \cos 2\pi f_0 t = 0}$$

$\leftarrow 0$

c) La funzione di autocorrelazione del processo $\tilde{e}$, per definizione:

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = E\{A \cdot \cos 2\pi f_0 t_1 \cdot A \cdot \cos 2\pi f_0 t_2\} = E\{A^2\} \cdot \cos \dots \cos \dots$$

Osservando che il valore quadratico medio di A ($E\{A^2\}$) coincide in questo caso con la sua varianza σ_X^2 essendo $\mu_A = E\{A\} = 0$, e ricordando l'espressione della varianza di una v.a. uniforme si ha:

$$E\{A^2\} = \sigma_X^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Ma anche (dal teorema dell'aspettazione):

$$E\{A^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \cdot f_A(a) da = \int_{-1}^{+1} a^2 \cdot \frac{1}{2} da = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{3} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}$$

Si ha quindi, sviluppando il prodotto di coseni:

$$\boxed{R_X(t_1, t_2) = E\{A^2\} \cdot \cos 2\pi f_0 t_1 \cdot \cos 2\pi f_0 t_2 = \frac{1}{6} [\cos 2\pi f_0 (t_1 + t_2) + \cos 2\pi f_0 (t_1 - t_2)]} \quad (1)$$

-d) La densità di probabilità del primo ordine del processo, $f_X(x, t)$, è la densità di una v.a. estratta dal processo fissando l'istante t .

Indicando per comodità con X tale v.a. essa è uguale ad A moltiplicata per la costante $c = \cos 2\pi f_0 t$ (fissato t).

È quindi: X funzione di A secondo la seguente:

$$X = A \cdot \cos 2\pi f_0 t = g(A)$$

Per trovare $f_X(x)$, che è $f_X(x, t)$ fissato t , si può applicare il teorema fondamentale osservando che l'equazione:

$$x = g(a) = c \cdot a$$

ha un'unica soluzione: $a_1 = \frac{x}{c}$ per ogni valore di x , e inoltre

$$\tilde{e}: g'(a) = c$$

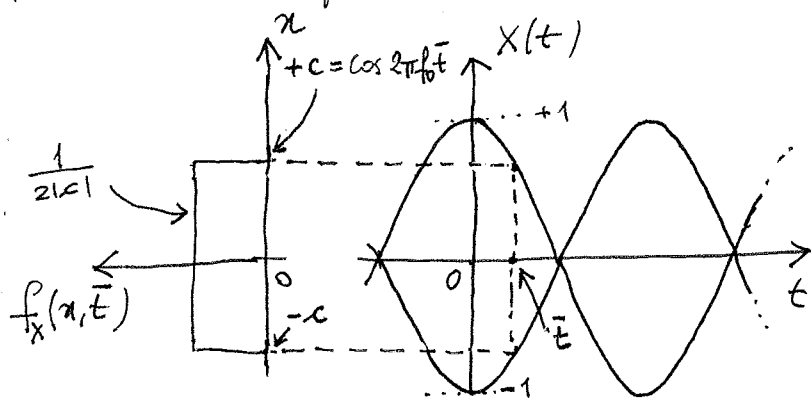


Si ha quindi:

$$f_x(x, t) = \frac{f_A(a_1)}{|g'(a_1)|} = \begin{cases} \frac{1/2}{|1-c|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|\cos 2\pi f_0 t|} & \text{per } -1 < a_1 < +1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\downarrow$
 $-1 < \frac{x}{c} < +1$
 $\downarrow$
 $-c < x < +c$
 $\downarrow$
 $-\cos 2\pi f_0 t < x < \cos 2\pi f_0 t$

Quindi si osserva che ogni v.a. estratta dal processo è una variabile uniforme sull'intervallo $(-c, +c)$ la cui estensione è diversa per ogni t perché c dipende da t così: $\pm c = \pm \cos 2\pi f_0 t$.
Si veda anche la seguente figura:



Nell'istante $t = \frac{1}{8f_0}$ e: $\pm c = \pm \cos\left(2\pi f_0 \frac{1}{8f_0}\right) = \pm \cos \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

La densità di probabilità è quindi in quell'istante:

$$f_x\left(x, \frac{1}{8f_0}\right) = \begin{cases} \frac{1/2}{|\sqrt{2}/2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{per } -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Da cui il grafico. $\rightarrow$

e) Poiché $f_x(x, t)$ dipende da t (ossia non è uguale per ogni t)

il processo non è stazionario del 1° ordine e quindi di nessun ordine superiore - Non è stazionario nemmeno in senso lato perché pur essendo $y_x(t)$ costante ($=0$), la funzione di autocorrelazione $R_x(t_1, t_2)$ non dipende solo dalla differenza $(t_1 - t_2)$ (Vedi (1)).