

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B65

19/2/14

Un sistema LTI è formato dal parallelo di due sistemi con risposte in frequenza:

$$H_1(f) = \Pi(f/2B); \quad H_2(f) = \Pi(f/2B) \cdot e^{-j\pi(f/B)}$$

a) Si traccino i diagrammi di modulo e argomento di $H_1(f)$ e $H_2(f)$.

All'ingresso del sistema complessivo si trova un processo bianco a media nulla $X(f)$ avente densità spettrale di potenza $S_X(f) = \gamma$.

b) Si trovi la densità spettrale di potenza $S_Y(f)$ del processo di uscita $Y(f)$ e se ne tracci un grafico.

c) Si trovi il valore quadratico medio (potenza) del processo $Y(f)$.

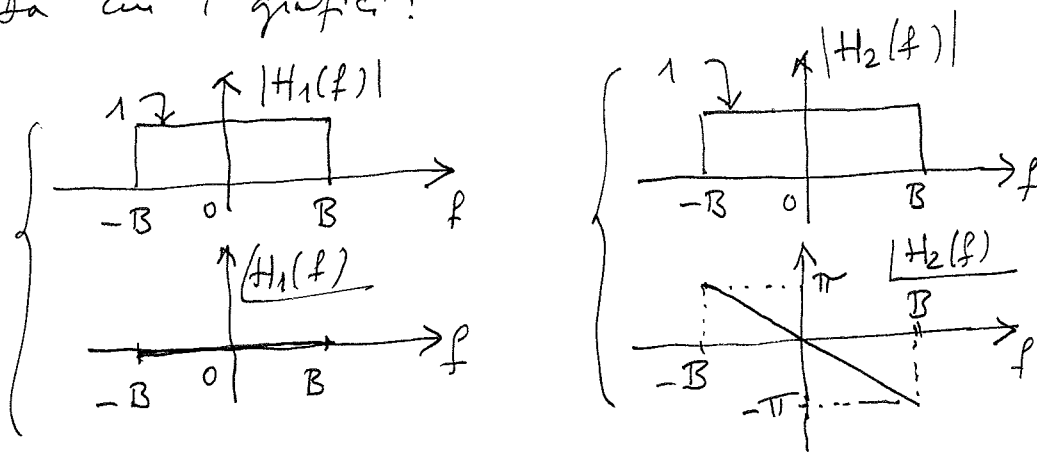
Quesito B65 (Soluzione)

a) Dall'osservazione delle funzioni date si ha:

$$|H_1(f)| = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right); \quad \angle H_1(f) = 0$$

$$|H_2(f)| = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right); \quad \angle H_2(f) = -\pi \frac{f}{B}$$

Da cui i grafici:



b) Detti $H(f)$ la risposta in frequenza del sistema complessivo la densità spettrale di potenza del processo di uscita rispettivamente:

$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2$$

occorre quindi trovare $H(f)$ e quindi $|H(f)|^2$. Poiché i sistemi sono in parallelo e:

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) + \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \cdot e^{-j\pi \frac{f}{B}} =$$

$$= \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \left[1 + e^{-j\pi \frac{f}{B}}\right] = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j\frac{\pi f}{2B}} \left[e^{j\frac{\pi f}{2B}} + e^{-j\frac{\pi f}{2B}}\right] =$$

$$= \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \cdot e^{-j\frac{\pi f}{2B}}$$

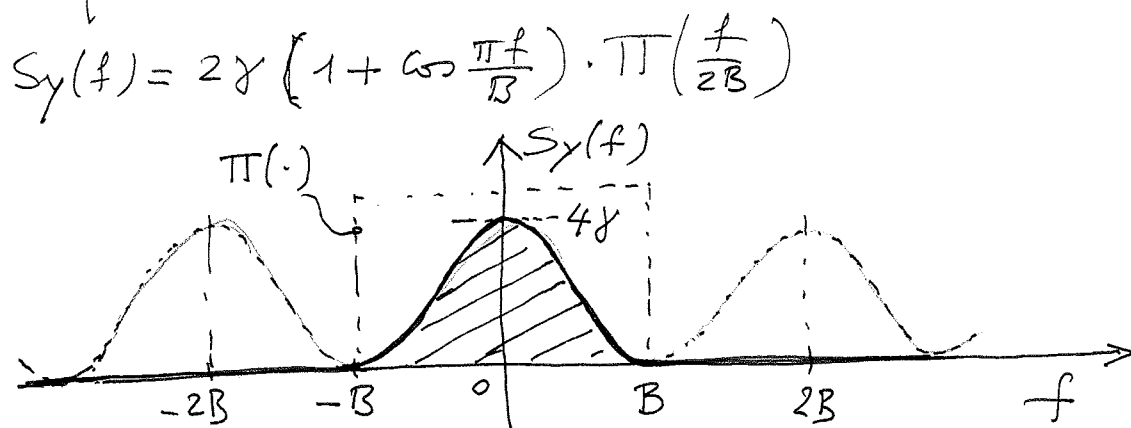
Da cui:

$$|H(f)|^2 = \left| \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \right|^2 = 4 \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \cos^2\left(\frac{\pi f}{2B}\right) =$$

$$= 4 \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi f}{2B}\right]$$

Si tratta di una cosinusoide in f di periodo $2B$ innalzata di 1 moltiplicata per $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ e limitata in frequenza dalla funzione $\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$ all'intervallo $(-B, B)$.

Moltiplicando per γ si ottiene $S_y(f)$ il cui grafico è quindi il seguente:



c) Il valore quadratico medio di $y(t)$ (potenza) si può ottenere da $S_y(f)$ mediante l'integrale:

$$\boxed{P_y = E\{y^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) df = \int_{-B}^B 2\gamma \left(1 + \cos \frac{\pi f}{B}\right) df =}$$

$$= 2\gamma \left[\int_{-B}^B df + \int_{-B}^B \cos \frac{\pi f}{B} df \right] = 2\gamma \left[2B + \frac{\sin \frac{\pi f}{B}}{\frac{\pi}{B}} \right]_{-B}^{+B} =$$

$$= 2\gamma \left[2B + \frac{\sin \frac{\pi B}{B} + \sin \frac{\pi (-B)}{B}}{\frac{\pi}{B}} \right] = \boxed{4 \cdot \gamma \cdot B}$$

Senza eseguire l'integrale si poteva osservare che, date le simmetrie di una sinusoide, l'area tratteggiata è uguale alla metà dell'area del rettangolo di base $2B$ e altezza 4γ .