

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B70

21/07/14

All'ingresso di un filtro passa banda ideale con frequenze di taglio f_L e f_H (con $f_L < f_H$) si trova in processo bianco $X(t)$ avente valor medio nullo e densità spettrale di potenza $S_X(f) = N_0/2$.

Sia $Y(t)$ il corrispondente processo di uscita.

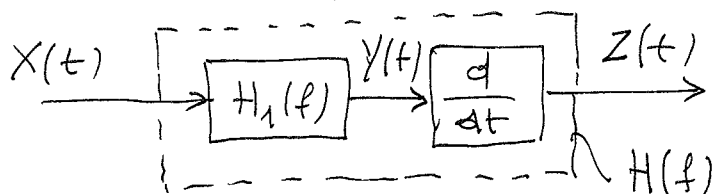
Il processo $Y(t)$ viene derivato rispetto a t ottenendosi il processo $Z(t) = dY(t)/dt$.

a) Si trovi l'espressione analitica della densità spettrale di potenza $S_Z(f)$ del processo $Z(t)$ e se ne tracci un grafico.

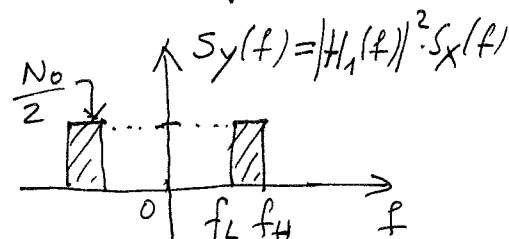
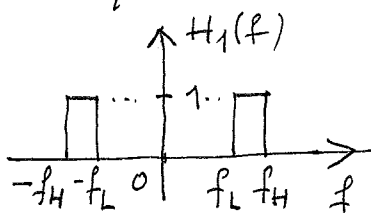
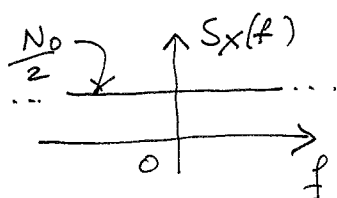
b) Si trovino le espressioni analitiche della potenza (valore quadratico medio) e della varianza del processo $Z(t)$.

Quesito B70 (Soluzione)

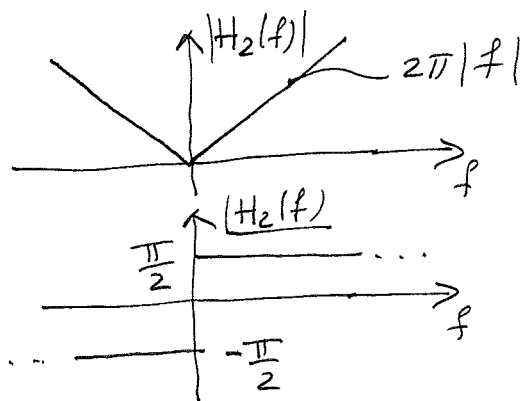
La situazione si può schematizzare come in figura:



Dove $H_1(f)$, $H_2(f)$ e $S_Y(f)$ sono come in figura:



Il derivatore è un filtro LTI con risposta in frequenza $H_2(f) = j2\pi f$ con modulo e argomento come in figura:



Il processo $Z(t)$ risulta essere l'uscita della cascata dei due sistemi H_1 e H_2 con risposta in frequenza:

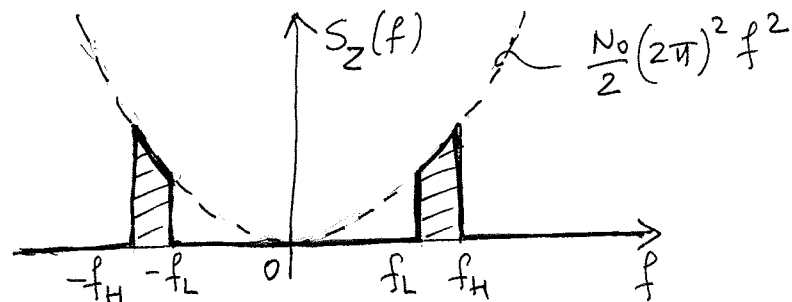
$$H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

a) La densità spettrale $S_Z(f)$ si trova così:

$$\begin{aligned} S_Z(f) &= S_X(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_1(f) \cdot H_2(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_1(f)|^2 \cdot |H_2(f)|^2 = \\ &= \frac{N_0}{2} H_1(f) \cdot (2\pi)^2 |f|^2 = (\text{segue}) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{N_0}{2} (2\pi)^2 f^2 & \text{per } f_L < |f| < f_H \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il cui grafico è in figura:



b) Il valor medio del processo di uscita: $y_z(t)$ è nullo infatti, essendo $E\{X(t)\} = y_x$ costante ($=0$) e:

$$y_z = y_x \cdot H(0) = 0 \cdot 0 = 0$$

Quindi la varianza del processo di uscita coincide con il suo valor quadratico medio (potenza) -

E' quindi:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 = P_z &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(f) df = 2 \cdot \int_{f_L}^{f_H} \frac{N_0}{2} (2\pi)^2 f^2 df = \\ &= N_0 (2\pi)^2 \left[\frac{f^3}{3} \right]_{f_L}^{f_H} = \frac{N_0 (2\pi)^2}{3} (f_H^3 - f_L^3) \end{aligned}$$