

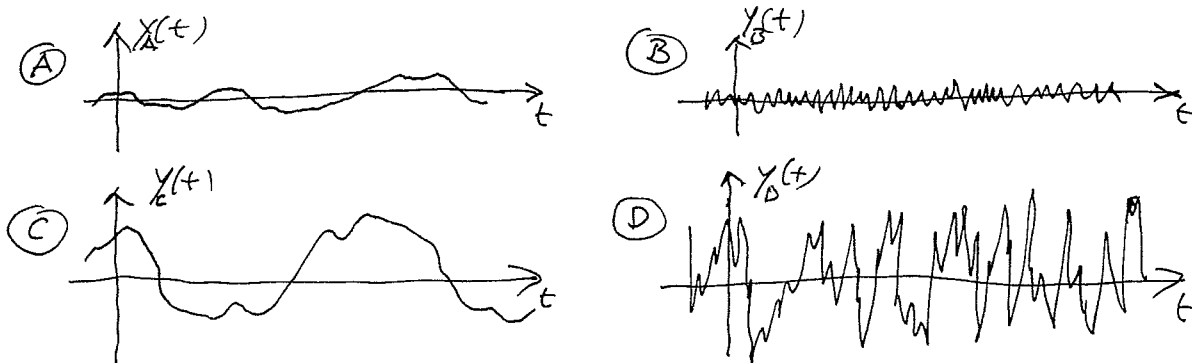
Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B7

Sia $X(t)$ un processo stocastico stazionario in senso lato a valor medio $\eta_X = 0$ e funzione di autocorrelazione $R_X(\tau) = \delta(\tau)$.

Si filtra tale processo con un filtro avente risposta in frequenza $H(f) = 1/(1 + j2\pi Df)$ con D costante positiva.

- Si trovi il valor medio e la funzione di autocorrelazione $R_Y(\tau)$ del processo di uscita $Y(t)$.
- Si traccino i diagrammi qualitativi di $R_Y(\tau)$ per due diversi valori arbitrari di D_1 e D_2 di D tali che $D_1 \ll D_2$.
- Siano A,B,C,D (vedi figura) quattro realizzazioni del processo di uscita $Y(t)$. Si dica quali siano le due realizzazioni più plausibili per i valori D_1 e D_2 .



Quesito B7 (Soluzione)

Si ha:

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f) \cdot |H(f)|^2\}$$

dove:

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = \mathcal{F}\{\delta(\tau)\} = 1$$

$$|H(f)|^2 = \left| \frac{1}{1 + j2\pi Df} \right|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi Df)^2}$$

Ricordando che: $\mathcal{F}\{Ae^{-B|t|}\} = \frac{2AB}{B^2 + (2\pi f)^2}$

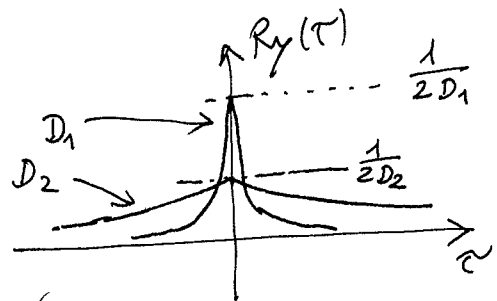
Si ottiene (con $A = \frac{1}{2D}$, $B = \frac{1}{D}$):

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{1 \cdot \frac{1}{1 + (2\pi Df)^2}\right\} = \frac{1}{2D} e^{-\frac{|\tau|}{D}}$$

Il valor medio dell'uscita è

$$\overline{y} = \overline{y}_X \cdot |H(0)| = 0, \text{ essendo } \overline{y}_X = 0$$

Diagrammi di $R_Y(\tau)$:



La potenza di un processo $Y(t)$ (valore quadratico medio) è uguale al valore della funzione di autocorrelazione calcolata nell'origine quindi nei due casi:

$$P_{Y1} = R_{Y1}(0) = \frac{1}{2D_1} \gg P_{Y2} = R_{Y2}(0) = \frac{1}{2D_2}$$

Quindi le realizzazioni del processo con potenza maggiore (caso D_1) sono mediamente più ampie di quelle del processo di potenza minore (caso D_2) -

Inoltre nel caso D_1 , a causa del rapido smorzamento di $R_{Y1}(\tau)$, due v.a. individuate da istanti a distanza τ hanno correlazione molto più bassa ~~rispetto~~ rispetto al caso D_2 -

Questo è segno di un maggiore contributo delle frequenze alte rispetto al caso D_2 e ciò dà luogo a realizzazioni più "agitate" -

Quindi l'abbinamento più plausibile è:

$D_1 \rightarrow \textcircled{D}$: realizzazioni più ampie e più agitate

$D_2 \rightarrow \textcircled{A}$: " " meno " e meno agitate.