

Esame di TEORIA DEI SEGNALE

Quesito B80

Si consideri il processo parametrico:

$$Y(t) = a \cos(2\pi X t)$$

dove X è una variabile aleatoria uniformemente distribuita fra -1 e 1 ed a una costante positiva.

a) Si traccino su un unico grafico le realizzazioni del processo corrispondenti ai seguenti valori di X :

$X=0$, $X=1/2$, $X=1$, usando per le scisse la scala: 1 quadretto = $1/8$ e limitando la rappresentazione all'intervallo $-3/2 < t < 3/2$. Per le ordinate si usi la scala: 1 quadretto = $a/4$.

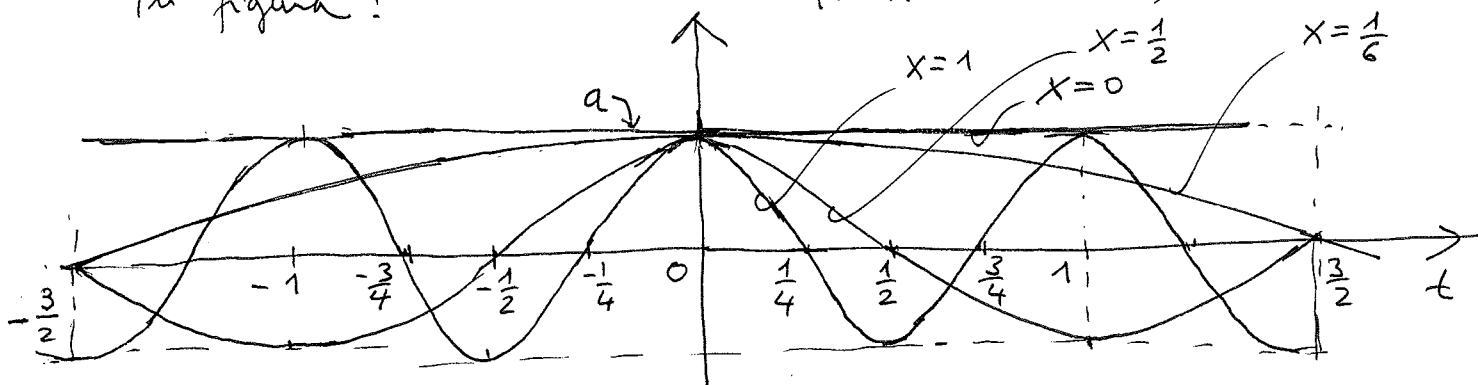
b) Si trovi il valor medio $\eta_Y(t)$ del processo e se ne tracci un grafico (con le stesse scale del punto a), ma in una diversa figura).

c) Si scriva l'espressione analitica della densità di probabilità del 1° ordine del processo per $t=0$, ossia $f_Y(x; 0)$, e se ne tracci il grafico.

d) Si dica quale sia il valore della varianza del processo nell'istante $t=0$, ossia $\sigma_Y^2(0)$.

Quesito B80 (Soluzione)

a) Per ogni valore di X si ha una realizzazione di $Y(t) = a \cdot \cos(2\pi X t)$ che è un coseno di frequenza X e periodo $\frac{1}{X}$ quindi nei casi proposti si hanno quattro coseni aventi i periodi $\frac{1}{0} \rightarrow \infty$; 6, 2 e 1, mostrati in figura:



b) Per ogni valore di t $Y(t)$ è una v.a. funzione della v.a. X ossia $Y(t) = a \cdot \cos(2\pi X t) = g(X)$ quindi il valor medio richiesto si può calcolare applicando il teorema dell'aspettazione:

$$\begin{aligned} \eta_Y(t) &= E\{Y(t)\} = E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{a \cdot \cos(2\pi x t)}_{g(x)} \cdot f_X(x) dx = \\ &= \int_{-1}^{+1} a \cos(2\pi x t) \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{a}{2} \left[\frac{\sin(2\pi x t)}{2\pi t} \right]_{-1}^{+1} = \frac{a}{2} \frac{\sin(2\pi t) - \sin(2\pi(-1)t)}{2\pi t} = \\ &= \frac{a}{2} \cdot 2 \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} = \boxed{a \operatorname{sinc}(2t)} \end{aligned}$$

