

La convoluzione gode delle proprietà
ASSOCIATIVA

Dimostrazione

Si vuole dimostrare che è vera la seguente:

$$(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) -$$

Definendo:

$$x_1(t) \triangleq x(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_1(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

$$h_2(t) \triangleq h_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) h_2(t-\tau) d\tau \quad (2)$$

in modo equivalente si vuole dimostrare che:

$$x_1(t) * h_2(t) = x(t) * h_3(t).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} x_1(t) * h_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) h_2(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h_1(\tau-\alpha) d\alpha \right] \cdot h_2(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

← $x_1(\tau)$: confrontare con (1) con $\tau \rightarrow \alpha$
e $t \rightarrow \tau$

in $d\tau$ τ in $d\alpha$

Scambiando l'ordine di integrazione si ha (*):

$$x_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau-\alpha) h_2(t-\tau) d\tau \right] d\alpha \quad (3)$$

α in $d\alpha$ τ in $d\tau$

Dimostriamo che l'integrale in parentesi è uguale
a $h_3(t-\alpha)$, infatti:

Col cambiamento di variabile:

$$\beta = \tau - \alpha \quad \text{da cui: } \tau = \alpha + \beta \quad \text{e} \quad d\tau = d\beta$$

si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau - \alpha) h_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\beta) h_2(t - \alpha - \beta) d\beta = h_3(t - \alpha)$$

L'ultima uguaglianza si verifica subito confrontando l'integrale con la (2) con le seguenti sostituzioni:

$$t \rightarrow t - \alpha$$

$$\tau \rightarrow \beta$$

Riprendendo quindi la (3):

$$\boxed{x_1(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \cdot h_3(t - \alpha) d\alpha = \boxed{x(t) * h_3(t)}}$$

C. V. D.

(*) La giustificazione rigorosa dello scambio dell'ordine di integrazione è materia del corso di Analisi matematica 2.

Qui utilizziamo un risultato che può essere giustificato intuitivamente come segue.

Ricordando che un integrale definito ha le proprietà di una somma, scambiare l'ordine di integrazione equivale a cambiare l'ordine degli addendi, operazione che non modifica il risultato. Lo scambio dell'ordine di integrazione è tuttavia possibile solo quando tutti i limiti di integrazione sono delle costanti (oppure sono $+$ o $-$ infinito), ossia quando non sono funzioni delle variabili di integrazione in gioco.