

VERIFICA DELLE PROPRIETÀ DEI SISTEMI (SOLUZIONE ESERCIZI)

Per ciascuno dei seguenti sistemi dire
se il sistema è

(1)

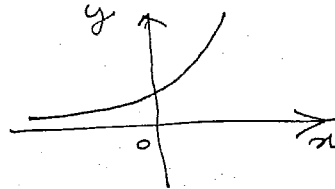
- 1) Con o senza memoria
- 2) Tempo invariante
- 3) Lineare
- 4) Causale
- 5) Stabile

a)

$$y(t) = e^{x(t)}$$

- 1) È senza memoria perché $y(t)$ è funzione di $x(t)$ — Ha quindi caratteristica ingresso-uscita di equazione $y = e^x$

ovvia:



- 2) Ogni sistema senza memoria la cui caratteristica ingresso-uscita ha equazione con coefficienti o parametri non dipendenti dal tempo è tempo-invariante —

Verifica:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = e^{x(t)}$$

$$x_R(t) = x(t - t_0) \longrightarrow y_R(t) = e^{x_R(t)} = e^{x(t - t_0)}$$

$$y_{R+T}(t) = y(t - t_0) = e^{x(t - t_0)} = y_R(t)$$

quindi è tempo-invariante e
verificata —

(2)

3) È noto che l'unico sistema senza memoria lineare è la moltiplicazione per costante comunque verifichiamo:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = e^{x_1(t)}$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = e^{x_2(t)}$$

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = e^{[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]}$$

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha e^{x_1(t)} + \beta e^{x_2(t)} \neq y_3(t)$$

Quindi il sistema è non lineare.

4) Causalità -

Un sistema senza memoria è sempre causale perché l'uscita all'istante t ($y(t)$) dipende solo dall'ingresso ~~atto~~ allo stesso istante (e non ad istanti precedenti) -

5) Stabilità

Perché $y = e^x$ è monotona crescente,

da $x < M$ segue che $y < e^M$

e da $-M > x$ " " $e^{-M} > y$

Quindi se:

$-M < x < M$ segue che $e^{-M} < y < e^M$

E poiché è: $-e^M < e^{-M}$, detto $K \triangleq e^M$

segue che: $-K < y < K$

Quindi il sistema è stabile -

f)

$$y(t) = x(t-1) - x(1-t)$$

1) Memoria

Il sistema è con memoria perché per conoscere $y(t)$ occorre conoscere $x(t)$ nei due istanti $(t-1)$ e $(1-t)$ diversi da t .

2) Tempo invariato

Verifica:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = x(t-1) - x(1-t)$$

$$x_R(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_R(t) = x_R(t-1) - x_R(1-t) = \\ = \underline{x(t-1-t_0) - x(1-t-t_0)}$$

$$y_{rit}(t) = y(t-t_0) = x(t-t_0-1) - x(1-(t-t_0)) = \\ = \underline{x(t-t_0-1) - x(1-t+t_0)} \neq y_R(t)$$

Il sistema non è tempo invariato

3) Linearità

Verifica:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = x_1(t-1) - x_1(1-t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = x_2(t-1) - x_2(1-t)$$

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = x_3(t-1) - x_3(1-t) = \\ = \alpha [x_1(t-1) - x_1(1-t)] + \beta [x_2(t-1) - x_2(1-t)]$$

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha [x_1(t-1) - x_1(1-t)] + \beta [x_2(t-1) - x_2(1-t)] = \\ = y_3(t) \quad \leftarrow \text{facile da verificare.} \\ \text{Quindi il sistema è lineare.}$$

4) Causalità

È stato verificato che il sistema è
 con memoria - È causale e ha "memoria
 solo del passato" - Con non è pochi
 per trovare $y(t+1)$ all'istante t occorre
 conoscere $x(t)$ negli istanti $(t-1)$, che è
 sempre minore di t , e $(1-t)$ che è minore
di t solo per $t > \frac{1}{2}$, quindi in generale
 "serve anche il futuro" e il sistema non è
 causale -

5) Stabilità

L'uscita è la somma di versioni
~~traslate~~ traslate (o ribaltate) dell'ingresso
 quindi se l'ingresso è limitato lo è
 anche l'uscita e il sistema è stabile -

(5)

g)

$$y(t) = [\sin(6t)] \cdot x(t)$$

1) Memoria

Il sistema è senza memoria: $y(t)$ dipende solo da $x(t)$.
 La caratteristica ingresso uscita è del tipo $y = A \cdot x$
 dove però A è funzione del tempo: $A = \sin 6t$.
 Cio' comporta la tempo-varianza, quindi
 requisito verificato.

2) Tempo invarianza

Verifica:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = [\sin(6t)] x(t)$$

$$x_R(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_R(t) = [\sin(6t)] x_R(t) =$$

$$= [\sin(6t)] x(t-t_0)$$

$$y_{RIT}(t) = y(t-t_0) = [\sin(6(t-t_0))] x(t-t_0) \neq y_R(t)$$

quindi il sistema è tempo variante.

3) Linearità

Verifica:

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = [\sin(6t)] x_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = [\sin(6t)] x_2(t)$$

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = [\sin(6t)] \cdot x_3(t) =$$

$$= [\sin(6t)] [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]$$

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha [\sin(6t)] x_1(t) + \beta [\sin(6t)] x_2(t)$$

che è immediato verificare essere uguale a $y_3(t)$
 quindi il sistema è lineare.

4) Causalità

Il sistema è senza memoria quindi è causale.

5) Stabilità

In ogni istante l'ingresso viene moltiplicato per un valore finito ($\sin(6t)$) quindi se l'ingresso è limitato lo è anche l'uscita e il sistema è stabile.

(7)

1)

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x(t) + x(t-100) & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

1) Memoria

In ~~generale~~ generale per conoscere $y(t)$ occorre conoscere $x(t)$ all'istante t e all'istante $(t-100)$ quindi il sistema è con memoria.

2) Tempo invariante

verifica:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t) + x(t-100), & t \geq 0 \end{cases}$$

$$x_R(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_R(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x_R(t) + x_R(t-100), & t \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x(t-t_0) + x(t-100-t_0), & t \geq 0 \end{cases} \quad \swarrow \neq !$$

$$y_{RIT}(t) = y(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t-t_0 < 0 \text{ ossia } t < t_0 \\ x(t-t_0) + x(t-t_0-100), & t-t_0 \geq 0 \text{ ossia } t \geq t_0 \end{cases}$$

Il sistema è tempo variante perché

$y_R(t) \neq y_{RIT}(t)$ (a causa degli intervalli).

3) Linearità

(8)

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-100), & t \geq 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-100), & t \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow y_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ x_3(t) + x_3(t-100), & t \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \alpha x_1(t-100) + \beta x_2(t-100), & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \begin{cases} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 & \text{per } t < 0 \\ \alpha [x_1(t) + x_1(t-100)] + \beta [x_2(t) + x_2(t-100)] & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

$\nearrow = !$

È immediato verificare l'uguaglianza e quindi la linearità.

4) Causalità

Il sistema ha memoria del solo passato perché $t-100$ è sempre minore di t quindi è causale.

5) Stabilità

L'uscita è zero per $t < 0$ ed è la somma di due versioni dell'ingresso mutuamente traslate, per $t \geq 0$.

Quindi se l'ingresso è limitato lo è anche l'uscita e il sistema è stabile.

9

m)

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-100) & \text{per } x(t) \geq 0 \end{cases}$$

1) Memoria

Come nel caso e), per ~~conoscere~~ conoscere $y(t)$ è necessario conoscere $x(t)$ in t e in $(t-100)$ quindi il sistema è con memoria (del passato).

2) Tempo invariante

Verifica:

$$x(t) \longrightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-100) & \text{per } x(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_R(t) = x(t-t_0) \longrightarrow y_R(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x_R(t) < 0 \\ x_R(t) + x_R(t-100) & \text{per } x_R(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } x(t-t_0) < 0 \\ x(t-t_0) + x(t-t_0-100) & \text{per } x(t-t_0) \geq 0 \end{cases}$$

$$y_{R,t}(t) = y(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{per } x(t-t_0) < 0 \\ x(t-t_0) + x(t-t_0-100) & \text{per } x(t-t_0) \geq 0 \end{cases} \quad \Bigg\} = !$$

Il sistema è tempo invariante, perché

$$y_R(t) = y(t-t_0) \text{ per } x(t) \text{ e } t_0$$

3) Linearità

$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x_1(t) < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-100), & x_1(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x_2(t) < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-100), & x_2(t) \geq 0 \end{cases}$$



$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } x_3(t) < 0 \\ x_3(t) + x_3(t-100) & \text{per } x_3(t) \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) < 0 \\ \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \alpha x_1(t-100) + \beta x_2(t-100) & \text{per } \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \begin{cases} 0 & x_1(t) < 0, x_2(t) < 0 \\ \alpha x_1(t) + \alpha x_1(t-100), & x_1(t) \geq 0, x_2(t) < 0 \\ \beta x_2(t) + \beta x_2(t-100), & x_1(t) < 0, x_2(t) \geq 0 \\ \alpha x_1(t) + \alpha x_1(t-100) + \beta x_2(t) + \beta x_2(t-100) & \text{per } x_1(t) \geq 0, x_2(t) \geq 0 \end{cases}$$

La linearità non è verificata -

4) Causalità

Il sistema ha memoria del solo passato quindi è causale

5) Stabilità

Anche in questo caso l'uscita è la somma di due versioni traslate di $x(t)$ quindi se $x(t)$ è limitato lo è anche la loro somma ed il sistema è stabile -