



Corso di Laurea/D.U. in Ingegneria INFORMATICA

Insegnamento TEORIA DEI SEGNALE

Nome/Cognome _____

22/11/03

Compito **B**

1) $y(t) = \frac{1}{T} e^{t/T} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} x(\tau) d\tau$

relazione

Il sistema descritto dalla precedente funzionale è lineare se:

$$T[a x_1(t) + b x_2(t)] = a T[x_1(t)] + b T[x_2(t)]$$

Suppongo di avere i seguenti ingressi

$$x_1(t), x_2(t) \text{ e } x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

e cui corrispondono le uscite

$$y_1(t) = \frac{1}{T} e^{t/T} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} x_1(\tau) d\tau$$

$$y_2(t) = \frac{1}{T} e^{t/T} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} x_2(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \frac{1}{T} e^{t/T} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} x_3(\tau) d\tau = \frac{1}{T} e^{t/T} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} (a x_1(\tau) + b x_2(\tau)) d\tau = \\ &= \frac{a}{T} e^{t/T} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} x_1(\tau) d\tau + \frac{b}{T} e^{t/T} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} x_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Considero ora la combinazione lineare dei segnali di uscita $y_1(t)$ e $y_2(t)$

$$a y_1(t) + b y_2(t) = \frac{a}{T} e^{t/T} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} x_1(\tau) d\tau + \frac{b}{T} e^{t/T} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} x_2(\tau) d\tau$$

che risulta uguale a $y_3(t)$, cioè all'uscita della combinazione lineare degli ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

Il sistema risulta quindi stabile ??

lineare! ✓

Un sistema è stazionario se applicando a un segnale $x(t)$, e cui corrisponde un'uscita $y(t)$, un ritardo di t_0 l'uscita di un tale segnale corrisponde alla $y(t)$ ritardata dello stesso t_0 .

Considero quindi un segnale $x_R(t) = x(t-t_0)$ e cui corrisponda un'uscita

$$x_R(t) = x(t-t_0) \rightarrow y_R(t) = \frac{1}{T} e^{\frac{t}{T}} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} x(\tau-t_0) d\tau$$

Considero ora l'uscita di $x(t)$ ritardata di t_0

$$y(t-t_0) = \frac{1}{T} e^{\frac{t-t_0}{T}} \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-\tau/T} x(\tau) d\tau$$

Analizzo l'effetto di un cambio di variabile in $y_R(t)$ per portare gli integrali ~~derivati~~ ~~gli estremi di integrazione~~ contenuti in $y_R(t)$ e in $y(t-t_0)$ ad avere gli stessi estremi di integrazione

$$y_R(t) = \frac{1}{T} e^{\frac{t}{T}} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} x(\tau-t_0) d\tau = \frac{1}{T} e^{\frac{t}{T}} \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-\frac{\alpha-t_0}{T}} x(\alpha) d\alpha = \frac{1}{T} e^{\frac{t}{T}} \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-\frac{\alpha}{T}} e^{\frac{t_0}{T}} x(\alpha) d\alpha =$$

$$= \frac{1}{T} e^{\frac{t}{T}} \cdot e^{\frac{t_0}{T}} \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-\frac{\alpha}{T}} x(\alpha) d\alpha = \frac{1}{T} e^{\frac{t-t_0}{T}} \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-\frac{\alpha}{T}} x(\alpha) d\alpha$$

Otengo quindi che $y_R(t)$ è uguale a $y(t-t_0)$ quindi il sistema è stazionario. ✓

Essendo il sistema lineare e stazionario determino la risposta impulsiva ponendo $x(t) = \delta(t)$

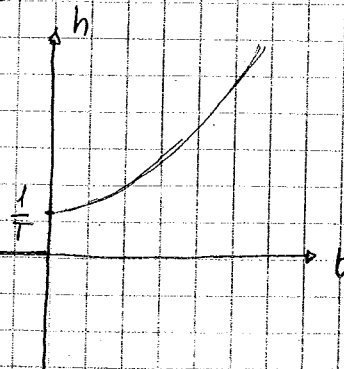
$$h(t) = \frac{1}{T} e^{\frac{t}{T}} \int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} \delta(\tau) d\tau$$

Per le proprietà di campionamento ~~la~~ ~~del~~ $\delta(t)$ ~~è~~

$$\int_{-\infty}^t e^{-\tau/T} \delta(\tau) d\tau = \text{vale } e^{-\tau/T} \text{ calcolato in } \tau=0$$

Per $t < 0$ l'integrale ~~vale~~ è quindi nullo mentre per $t > 0$ $h(t)$ vale

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{T} e^{\frac{t}{T}} & t \geq 0 \end{cases}$$



L'uscita ad un istante t

Un sistema è causale se non dipende da valori futuri del segnale di ingresso, in particolare i sistemi LS sono causali se la loro $h(t)$ è causale. In questo caso il sistema è causale perché la $h(t)$ è nulla per ~~valori~~ $t < 0$. ✓

Per i sistemi LS sono stabili B.I.B.O. se hanno vale $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$

In questo caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{T} e^{\frac{t}{T}} \right| dt = +\infty$$

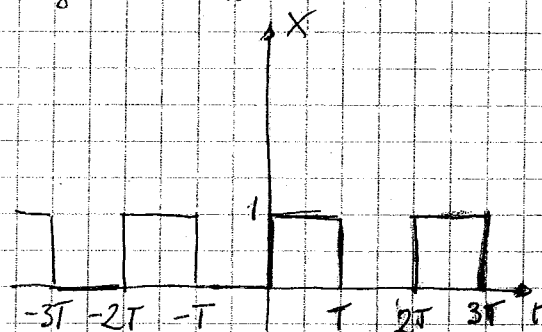
quindi il segnale non è stabile

$$2) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} - 2n\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n2T}{T}\right)$$

Il segnale è un'onda quadra ottenuta sommando infiniti gradini unitari

Il periodo T_0 risulta quindi essere $2T$

$$T_0 = 2T$$



Calcolo i coefficienti di Fourier del segnale

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Scego come intervallo di integrazione $\left(-\frac{T_0}{2}, +\frac{T_0}{2}\right)$, ~~trasporto l'indice di~~

Il segnale risulta essere nullo per valori compresi tra $-\frac{T_0}{2}$ e 0 quindi è pari a 1 per valori compresi tra 0 e $\frac{T_0}{2}$ quindi risulta:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0 \cdot (-j2\pi k f_0)} \left[e^{-j2\pi k f_0 t} \right]_0^{T_0/2} = 0$$

$$= -\frac{1}{j2\pi k} \cdot \left[e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - 1 \right] = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{j2\pi k} = \frac{1 - \cos(-\pi k)}{j2\pi k} = \frac{1 - \cos(\pi k)}{j2\pi k}$$

Le componenti continue di $x(t)$ si trova per $k=0$

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} 1 dt = \frac{T_0/2}{T_0} = \frac{1}{2}$$

Direttamente:

$$e^{-j\pi k} = (e^{-j\pi})^k = (-1)^k$$

$$X_k = \frac{1 - \cos(\pi k)}{j2\pi k}$$

Poiché $\sin(\pi k)$ è sempre nullo allora X_k risulta

in cui per i valori di k positivi pari il coseno vale 1

quindi tutti X_K con K pari risultano nulli, con K dispari si ha invece

$$X_K = \frac{1 - (-1)^K}{j2\pi K} = \frac{1}{j\pi K} = -\frac{j}{\pi K}$$

Il modulo Il modulo di X_K segue quindi

l'andamento di $\frac{1}{\pi K}$ con $X_K = 0$ per i valori pari di K e $X_K = \frac{1}{2}$ per $K=0$

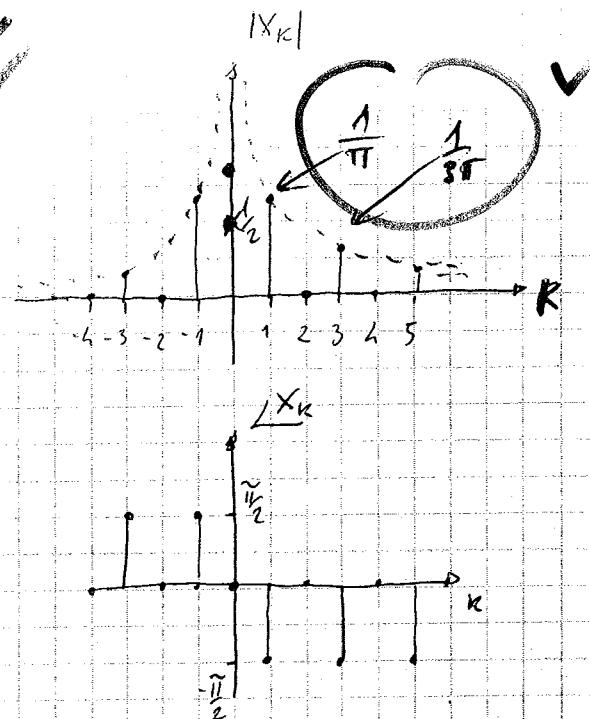
$$|X_K| = \begin{cases} \frac{1}{j\pi K} & K \text{ dispari} \\ \frac{1}{2} & K=0 \\ 0 & K \text{ pari} \end{cases}$$

Essendo X_K immaginario puro per $\forall K \neq 0$ e reale

per $K=0$

$$\angle X_K = \begin{cases} 0 & K=0 \\ +\frac{\pi}{2} & K<0 \\ -\frac{\pi}{2} & K>0 \end{cases}$$

Come ci si poteva attendere ho ottenuto che $|X_K|$ è pari e $\angle X_K$ è dispari, X_K gode delle simmetrie Hermitiane e infatti questo deriva dal fatto che $x(t)$ sia reale.



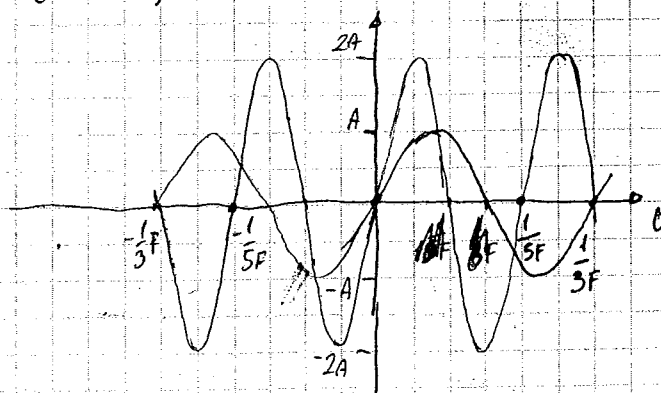
3) $x(t) = 2A \sin(10\pi Ft) + A \sin(6\pi Ft)$

Il periodo delle prime sinusoidi è uguale a:

$$10\pi Ft_1 = 2\pi \quad T_1 = \frac{1}{5F} \quad f_1 = 5F$$

Il periodo delle seconde sinusoidi è:

$$6\pi Ft_2 = 2\pi \quad T_2 = \frac{1}{3F} \quad f_2 = 3F$$



Il periodo di tutto il segnale (T_0) deve soddisfare entrambi gli argomenti delle due sinusoidi.

Risultate che $T_0 = \frac{1}{F}$ $f_0 = F$

$$T_0 = mT_1 = nT_2 \text{ con } m, n \text{ interi}$$

$$m \frac{1}{5F} = n \frac{1}{3F} \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{5}{3} \rightarrow \begin{cases} m=5 \\ n=3 \end{cases}$$

$$T_0 = 5 \cdot \frac{1}{5F} = 3 \cdot \frac{1}{3F} = \frac{1}{F}$$

$$x(t) = 2A \sin(2\pi 5Ft) + A \sin(2\pi 3Ft)$$

Il segnale è reale e dispari, ma essendo la somma di due segnali dispari, mi spello quindi che gli X_K sono immaginari puri e dispari.



Corso di Laurea/D.U. in Ingegneria INFORMATICA

Insegnamento TEORIA DEI SEGNALE

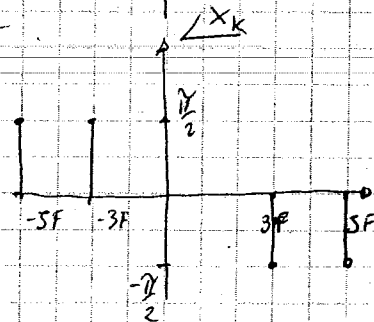
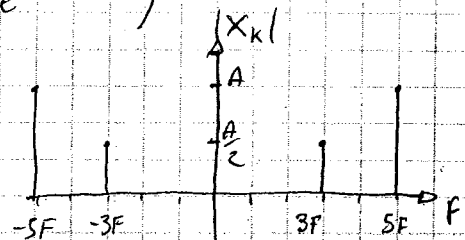
Nome/Cognome _____

Matricola _____

$$X(t) = \frac{A}{5} \left(e^{j2\pi 5Ft} - e^{-j2\pi 5Ft} \right) + \frac{A}{25} \left(e^{j2\pi 3Ft} - e^{-j2\pi 3Ft} \right)$$

$$X_k = \begin{cases} \frac{A}{5} & k = \pm 5 \\ \frac{A}{25} & k = \pm 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$|X_k| = \begin{cases} \frac{A}{5} & k = \pm 5 \\ \frac{A}{25} & k = \pm 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



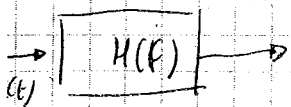
~~considerando il modulo~~

la fase degli $\angle X_k$ vale sempre $\pm \frac{\pi}{2}$ essendo sempre valori immaginari.

$$\angle X_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & k = -3 \vee k = -5 \\ -\frac{\pi}{2} & k = 3 \vee k = 5 \end{cases}$$

Per tutti gli altri valori di k abbiamo fase nulla

Come ci si aspettava abbiamo ottenuto che gli X_k sono immaginari puri e dispari



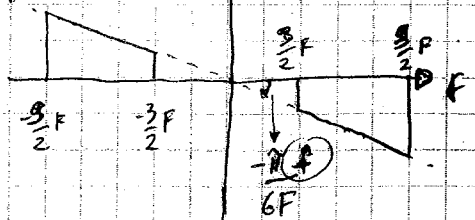
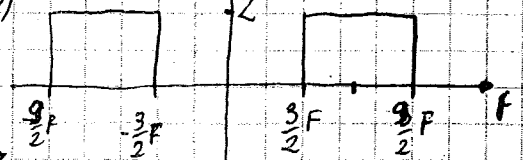
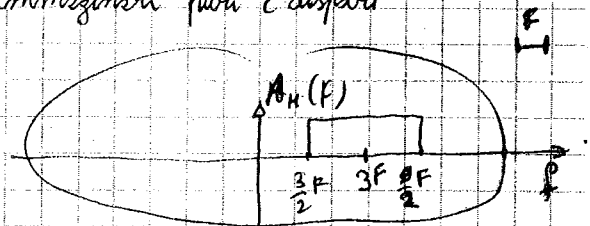
Distingue f minuscolo da F maiuscolo!!

$$H(F) = \left[2\pi \left(\frac{F}{3F} - 1 \right) + 2\pi \left(\frac{F}{3F} + 1 \right) \right] e^{-j\frac{\pi}{6} \frac{F}{F}}$$

$$A_H(F) = \left[2\pi \left(\frac{F}{3F} - 1 \right) + 2\pi \left(\frac{F}{3F} + 1 \right) \right]$$

$$\varphi_H(F) = -\frac{\pi}{6} \frac{F}{F}$$

Disegno OK ma non in scala



Ma vedendo le proprietà di simmetria Hermitiana per $H(F)$ allora $h(t)$ è reale

L'uscita del sistema è data da:

$$Y_k = X_k H(kF_0)$$

Y_k risultano quindi esseri nulle per $k = \pm 5$,

~~$Y_k = \pm 5A$~~ infatti $H(5F) = 0$

Gli unici termini restanti saranno quindi per

$$k = \pm 3$$

$$\begin{cases} |Y_k| = |X_k| |H(kF_0)| \\ \angle Y_k = \angle X_k + \phi_H(kF_0) \end{cases}$$

$$\angle Y_3 = \angle X_3 + \left(-\frac{\pi}{6} \frac{3F}{F}\right) = -\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$$

$$\angle Y_{-3} = \angle X_{-3} + \left(+\frac{\pi}{6} \frac{3F}{F}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Il segnale $y(t)$ risultante sarà reale, perché Y_k gode delle simmetrie Hermitiane, e però perché Y_k sono reali pari.

$$y(t) = \frac{1}{2} A (e^{j2\pi 3Ft} + e^{-j2\pi 3Ft}) = 2A \cos(6\pi Ft)$$

